ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 1

- Empezando con Maple. Operaciones básicas.
- Ejercicio 1
- Generando matrices y vectores sin usar las paletas
- Ejercicio 2
- Trabajando con longitudes, distancias y ortogonalidad
- Ejercicio 3
- Visualizando planos en el espacio
- Ejercicio 4
- Trabajando con matrices elementales
- Ejercicio 5
- Calculando inversas de matrices cuadradas
- Ejercicio 6
- Ejercicio 7
- Trabajando con las propiedades de los determinantes
- Ejercicio 8
- Ejercicio 9
- Rangos de conjuntos de vectores y rangos de matrices
- Ejercicio 10
- Usando los tutoriales de Maple

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 2

- **Resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Visualizando sistemas de dos y tres ecuaciones con tres incógnitas.**
- **Ejercicio 1**
- **Ejercicio 2**
- **Reducción de una matriz a su forma escalonada para hallar el rango**
- **Ejercicio 3**
- **Ejercicio 4**
- **Proyecciones ortogonales.**
- **Ejercicio 5**
- **Ejercicio 6**
- **Soluciones aproximadas de ecuaciones lineales (solución mínimo cuadrática)**
- **Ejercicio 7**
- **Ejercicio 8**
- **Ejercicio 9**
- **Método de ortogonalización de Gram-Schmidt**
- **Ejercicio 10**

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

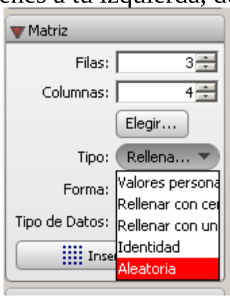
PRACTICA 3

- **Autovalores y autovectores y su visualización**
- **Ejercicio 1**
- **Ejercicio 2**
- **Ejercicio 3**
- **Ejercicio 4: los "trucos" de tus profesores.**
- **Aplicación: Sistemas dinámicos**
- **Ejercicio 5**
- **Aplicación: Autovalores y buscadores en páginas web**
- **Ejercicio 6**
- **Formas cuadráticas y su visualización**
- **Ejercicio 7**
- **Ejercicio 8**
- **Ejercicio 9**
- **Ejercicio 10**

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 1

Empezando con Maple. Operaciones básicas.

Hay varias maneras de introducir una matriz. La más sencilla es usando la paleta "Matriz" que tienes a tu izquierda, despliega la paleta y te aparecerá el siguiente recuadro: 

Puedes introducir una matriz de las dimensiones que quieras, le das a insertar y ahora solo tienes que rellenar los huecos.

Las operaciones básicas con matrices y vectores son:

A+B suma las matrices A y B

A.B multiplica las matrices A y B (vale para producto de matrices por vectores, y también para el producto de vectores, independientemente de si se expresan como vectores filas, columna, o uno de cada tipo.

A^n potencia n-ésmina de la matriz. En particular A^-1 es la inversa de A si A es invertible

A ^ + es la traspuesta de A

Para algunos de los ejercicios que vienen a continuación tendrás que cargar el paquete de álgebra lineal, o de estudiante para álgebra lineal. Los puedes cargar si vas a Herramientas/cargar paquete y seleccionas el paquete adecuado. A continuación cuando sea preciso un paquete lo avisaremos.

Si necesitas limpiar la memoria es comando es

restart

Ejercicio 1

Define tres matrices aleatorias A , B y C, donde A y B tienen dos filas y tres columnas, y C tiene 3 filas y 2 columnas. Define también dos vectores columna x, y en $\mathbb{R}^2$, donde x tiene todas sus componentes iguales a 1 e y tiene componentes aleatorias.
Calcula
a) (7A+B)*C
b) (7A+B)*C*x.
c) La traspuesta de la matriz (7A+B)*C
d) La inversa, si existe, de (7A+B)*C. Comprueba con esta matriz que la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.
e) El producto escalar de x e y

Solución

a)
Definimos en primer lugar las matrices y vectores pedidos usando la paleta:

$$> A := \begin{bmatrix} 99 & 44 & -31 \\ 29 & 92 & 67 \end{bmatrix}; B := \begin{bmatrix} -32 & -4 & 8 \\ -74 & 27 & 69 \end{bmatrix}; C := \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -2 & -16 \\ 50 & -9 \end{bmatrix}; x := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; y := \begin{bmatrix} 25 \\ 94 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 99 & 44 & -31 \\ 29 & 92 & 67 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -32 & -4 & 8 \\ -74 & 27 & 69 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -2 & -16 \\ 50 & -9 \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y := \begin{bmatrix} 25 \\ 94 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.1.1)}$$

> $7 \cdot A;\ 7 \cdot A + B;\ (7 \cdot A + B).C$

$$\begin{bmatrix} 693 & 308 & -217 \\ 203 & 644 & 469 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 661 & 304 & -209 \\ 129 & 671 & 538 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3126 & 3627 \\ 27106 & -14288 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.1.2)}$$

b)

> $(7 \cdot A + B).C.x$

$$\begin{bmatrix} 501 \\ 12818 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.2.1)}$$

c)

> $(7 \cdot A + B).C;\ ((7 \cdot A + B).C)^{+}$

$$\begin{bmatrix} -3126 & 3627 \\ 27106 & -14288 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3126 & 27106 \\ 3627 & -14288 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.3.1)}$$

d)

> $E := (7 \cdot A + B).C$

$$E := \begin{bmatrix} -3126 & 3627 \\ 27106 & -14288 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.4.1)}$$

> $E^{-1};\ (E^{+})^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{7144}{26824587} & \frac{1209}{17883058} \\ \frac{13553}{26824587} & \frac{521}{8941529} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7144}{26824587} & \frac{13553}{26824587} \\ \frac{1209}{17883058} & \frac{521}{8941529} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.1.4.2)}$$

e)

> $x.y$

$$119 \quad \textbf{(2.1.5.1)}$$

Generando matrices y vectores sin usar las paletas

Un vector fila como v=(1,2,3) y un vector columna como w=$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ se generan con las siguientes instrucciones:

v:=<1|2|3> La barra vertical se obtiene con AltGr+1 (aqui + indica que debes mantener AltGr pulsada cuando das a 1)

w:=<2,4>

Las matrices puedes generarlas por filas o por columnas. Por ejemplo la matriz A:=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ podemos definirla:

A:=<<1|2|3>,<4|5|6>> o alternativamente

A:=<<1,4>|<2,5>|<3,6>>

La clave para acordarte es que las columnas se separan por barras, y las filas por comas.

Ejercicio 2

Crea, sin usar las paletas los vectores v=(1,2,3) y w=$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y la matriz A:=

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Solución

```
> v := ⟨1|2|3⟩; w := ⟨2, 4, -3⟩; A := ⟨⟨1, 4⟩|⟨2, 0⟩|⟨-5, 6⟩⟩
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

Trabajando con longitudes, distancias y ortogonalidad

Recuerda que para hallar la longitud de un vector (norma) tienes que calcular el producto escalar del vector consigo mismo y luego tomar la raíz cuadrada.
El comando para la raíz cuadrada es sqrt, por ejemplo sqrt(4) es la raíz cuadrada de 4 que es 2. También puedes usar la paleta para poner una raíz cuadradada.
También puedes usar el comando norm(v,2) para hallar la norma (usando la distancia Euclídea, de ahi el 2) del vector v. La distancia entre dos puntos es la longitud del vector diferencia.
Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es cero.
Para ver el ángulo entre dos vectores v1 y v2 puedes usar el comando VectorAngle(v1, v2).
Para ello tendrás que cargar previamente el paquete de Algebra Lineal para estudiantes. Basta con que vayas a Herramientas\Cargar Paquete y ahi selecciones el de álgebra lineal para estudiantes.

Ejercicio 3

Para las matrices y vectores del ejercicio anterior v=(1,2,3) y w= $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y la matriz A:= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

a) Halla la longitud de v y de w
b) Halla la longitud de A*w
c) Dí si u y w son perpendiculares. En caso de que no lo sean halla el ángulo que forman.
d) Halla la distancia entre el punto v y el w

Solución

a)

```
> v := ⟨1|2|3⟩; w := ⟨2, 4, -3⟩; A := ⟨⟨1, 4⟩|⟨2, 0⟩|⟨-5, 6⟩⟩
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.1.1.1)}$$

```
> sqrt(v.v); sqrt(w.w)
```

$$\sqrt{14}$$

$$\sqrt{29} \qquad \textbf{(6.1.1.2)}$$

```
> norm(v, 2) # es la otra forma de calcular la norma de v
```

$$\sqrt{14} \qquad \textbf{(6.1.1.3)}$$

b)

```
> A.w
```

$$\begin{bmatrix} 25 \\ -10 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6.1.2.1)}$$

```
> sqrt(%.%); norm(A.w, 2)
```

$$5\sqrt{29}$$

$$5\sqrt{29} \qquad \textbf{(6.1.2.2)}$$

Recuerda que el símbolo % hace referencia al resultado anterior en memoria.

c)

> $v.w$

$$1 \quad \textbf{(6.1.3.1)}$$

Luego no son perpendiculares porque su producto escalar no es cero.

Cargando Student:-LinearAlgebra

> $\frac{v.w}{(\mathrm{sqrt}(v.v^{+})\mathrm{sqrt}(w^{+}.w))}$

$$\frac{1}{406}\sqrt{14}\sqrt{29} \quad \textbf{(6.1.3.2)}$$

> $evalf[5]($ **(6.1.3.2)** $)$

$$0.049631 \quad \textbf{(6.1.3.3)}$$

Cargamos el paquete necesario para calcular el arcocoseno

> $with(MTM):$

> $acos(0.049631)$

Otra forma es con el comando VectorAngle

> $VectorAngle(v, w)$

$$\arccos\left(\frac{1}{406}\sqrt{14}\sqrt{29}\right) \quad \textbf{(6.1.3.4)}$$

> $evalf[5]($ **(6.1.3.4)** $)$

$$1.5211 \quad \textbf{(6.1.3.5)}$$

> $\frac{\% \cdot 360}{2 \cdot \mathrm{Pi}}$ *#Esta es la equivalencia en grados*

$$\frac{273.7980}{\pi} \quad \textbf{(6.1.3.6)}$$

> $evalf[5]($ **(6.1.3.6)** $)$

$$87.153 \quad \textbf{(6.1.3.7)}$$

d)

> $\mathrm{sqrt}((v-w^{+}).(v-w^{+}))$

$$\sqrt{41} \quad \textbf{(6.1.4.1)}$$

> $evalf(\%)$

$$6.403124237 \quad \textbf{(6.1.4.2)}$$

Visualizando planos en el espacio

Las ecuaciones cartesianas de un plano en el espacio son

$$ax+by+cz+d=0$$

donde (a,b,c,d) son parámetros conocidos. El vector (a,b,c) es un vector que es perpendicular a todos los vectores contenidos en el plano.

Los planos más importantes son los planos coordenados que son los que tienen por ecuación x=0, y=0, y z=0 respectivamente. Otros planos importantes son los planos paralelos a los planos coordenados.

En el siguiente ejercicio dibujarás los planos coordenados, planos paralelos a éstos, planos en los que alguna de las constantes a,b ó c son nulas, y finalmente planos generales.

El comando para representar planos en el espacio es implicitplot3d.

Ejercicio 4

a) Dibuja los tres planos coordenados en un mismo gráfico. ¿En qué punto se cortan?

b) Dibuja los planos z=1, z=3, z=5 en un mismo gráfico. ¿Qué observas?

c) Dibuja los planos x=3, y=5, z=4 en un mismo gráfico. ¿En qué punto se cortan?

d) Dibuja los planos:

2x+y=10
x+3z=4
y-z=3

¿Qué observas?

e) Dibuja los planos

x+y+z=0
x+y+z=5

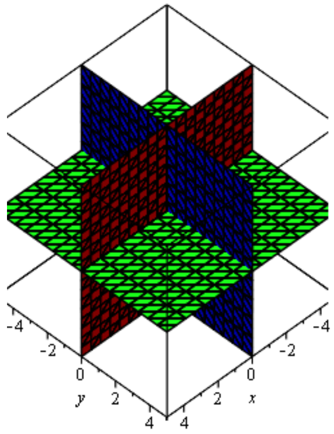
¿Qué observas?

Solución

a)

> $with(plots):$

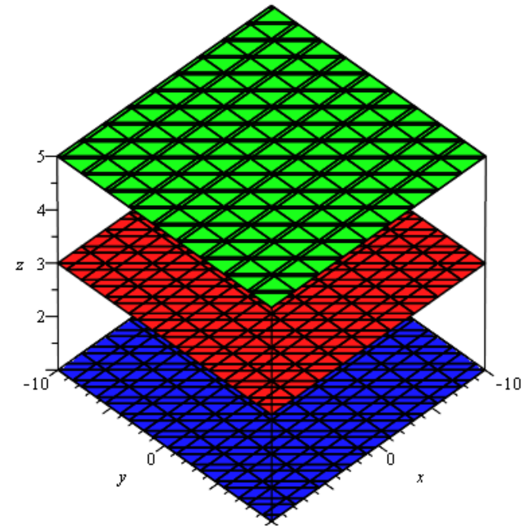
> $implicitplot3d([x=0, y=0, z=0], x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color=[blue, red, green])$



Se cortan en el (0,0,0).

b)

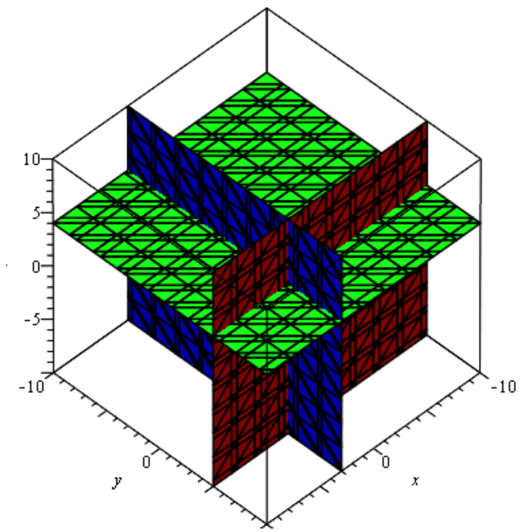
> $implicitplot3d([z=1, z=3, z=5], x=-10..10, y=-10..10, z=-2..6, color=[blue, red, green])$



Son planos paralelos al plano (x,y)

c)

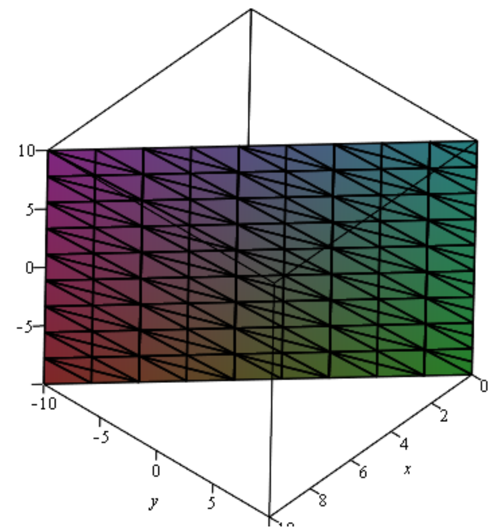
> $implicitplot3d([x=3, y=5, z=4], x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, color=[blue, red, green])$



Se cortan en el punto (3,5,4)

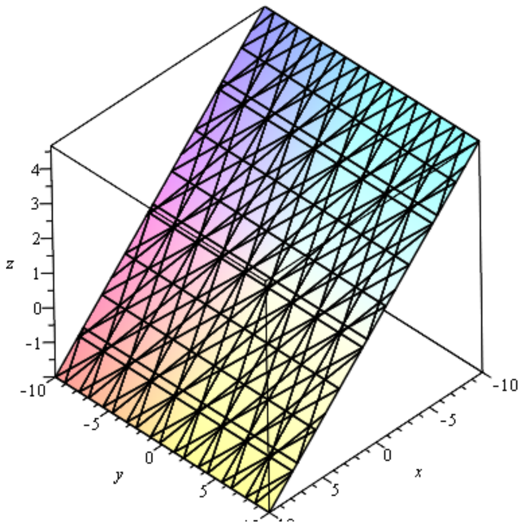
d)

> $implicitplot3d(2 \cdot x + y = 10, x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10)$



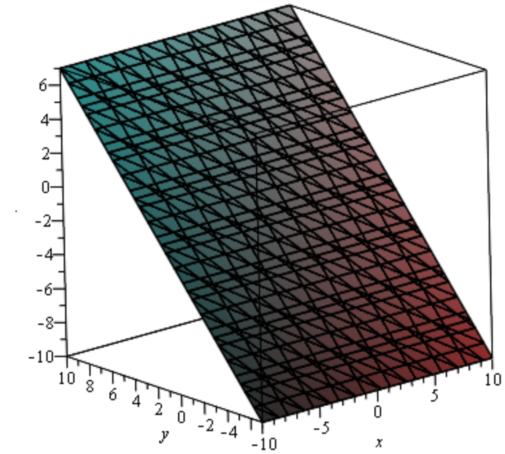
Vemos que es un plano paralelo al eje z. Es fácil dibujarlo, basta con fijarnos en el plano (x,y) y dibujar ahi la recta 2x+y=10, y luego considerar todas las rectas paralelas a ésta en la dirección del eje z.

> $implicitplot3d(x + 3 \cdot z = 4, x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10)$



Vemos que es un plano paralelo al eje y.

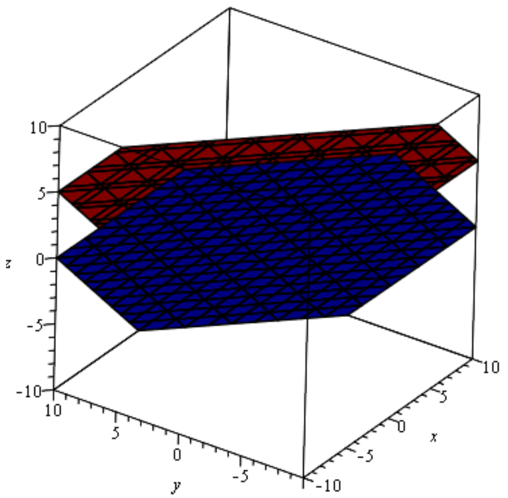
> *implicitplot3d*$(y - z = 3, x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10)$



Este es paralelo al eje x.

e)

> *implicitplot3d*$([x + y + z = 0, x + y + z = 5], x = -10..10, y = -10..10, z = -10..10,$ *color* = [*blue*, *red*])



Son planos que son paralelos.

Trabajando con matrices elementales

Recuerda que si E es una matriz elemental E*A efectúa operaciones elementales en las filas de la matriz A y A*E efectúa operaciones elementales en las columnas de la matriz A.
Hay tres tipos de matrices elementales (lo vemos para filas, pero es igual para columnas) que llamaremos Ei(a), Eij(a), Pij. Son las siguientes
Multiplicar la fila i por un escalar a: Ei(a),
Sumarle a la fila i la fila j multiplicada por la constante a: Eij(a)
Intercambiar las filas i y j: Pij.
La matriz identidad de dimensión n se construye o bien con la paleta o con el comando Id(n).

Ejercicio 5

a) Define una matriz A de 3 filas y 4 columnas. Define la matriz elemental E que le suma a la segunda fila la tercera multiplicada por cuatro. Calcula E*A y comprueba que efectivamente es esa la operación efectuada.
b) Para la matriz A del ejercicio anterior define la matriz E que le suma a la primera columna la tercera multiplicada por 2. Halla A*E y comprueba que efectivamente se ha realizado esa transformación.

Solución

a)

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}; E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; E.A$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 20 & 20 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(10.1.1.1)}$$

b)

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}; E: = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A.E$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 3 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.1.2.1)}$$

Calculando inversas de matrices cuadradas

Maple permite calcular la inversa de una matriz simplemente calculando su potencia -1.
La otra manera de hacerlo es con el comando inverse(A).
Sin embargo sabemos que el metodo de Gauss-Jordan permite calcular inversas a través de operaciones elementales en las filas de una matriz. Para ello se toma la matriz ampliada con la identidad (A|I) y si mediante transformaciones elementales en filas llegamos a (I|B) entonces B es la inversa de A.
Para aumentar una matriz A cuadrada de dimensión n con la identidad hacemos:
$C := \langle A | Id(n) \rangle$
Las operaciones que vas a hacer usando matrices elementales también puedes hacerlas con los comandos
AddRow(A, i, j, s), MultiplyRow(A,i,s) y SwapRow(A, i, j) de Maple.

Ejercicio 6

Genera una matriz 2x2 con elementos aleatorios y calcula su inversa usando los comandos de Maple, y luego mediante operaciones elementales en filas, a través del producto por la correspondiente matriz elemental.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} -25 & 76 \\ 51 & -44 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} -25 & 76 \\ 51 & -44 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.1)}$$

> $C := \langle A | Id(2) \rangle$

$$C := \begin{bmatrix} -25 & 76 & 1 & 0 \\ 51 & -44 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.2)}$$

Lo primero es conseguir un 1 en el elemento (1,1) para ello multiplico la primera fila por (-1/25)

> $E1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.3)}$$

> $C1 := E1.C$

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 51 & -44 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.4)}$$

Ahora para eliminar el 51 que está en el elemento (1,2) le sumamos a la segunda fila la primera multiplicada por -51

> $E2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -51 & 1 \end{bmatrix}$

$$E2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -51 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.5)}$$

> $C2 := E2.C1$

$$C2 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{2776}{25} & \frac{51}{25} & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.6)}$$

Ahora conseguimos poner un 1 en el elemento (2,2) de la matriz multiplicamos por la matriz E3 definida debajo

> $E3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{25}{2776} \end{bmatrix}$

$$E3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.7)}$$

> $C3 := E3.C2$

$$C3 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{51}{2776} & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.8)}$$

Finalmente Hay que poner un cero en el elemento (1,2)

> $E4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{76}{25} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$E4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{76}{25} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.9)}$$

> $C4 := E4.C3$

$$C4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{694} & \frac{19}{694} \\ 0 & 1 & \frac{51}{2776} & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.10)}$$

Lo comprobamos:

> A^{-1}

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{694} & \frac{19}{694} \\ \frac{51}{2776} & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.11)}$$

Ejercicio 7

Las operaciones que has hecho antes mediante la definición de las matrices elementales correspondientes puede hacerse también usando los comandos de Maple
AddRow(A, i, j, s), MultiplyRow(A,i,s) y SwapRow(A, i, j)
Para ello debes cargar antes el paquete de Algebra Lineal para estudiante.
Mira en el menú de ayuda de Maple cómo se usa este comando y halla la inversa de la matriz de tu ejemplo anterior usando este comando.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} -25 & 76 \\ 51 & -44 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} -25 & 76 \\ 51 & -44 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.1)}$$

> $B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.2)}$$

> $C := \langle A|B \rangle$

$$C := \begin{bmatrix} -25 & 76 & 1 & 0 \\ 51 & -44 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.3)}$$

Cargando Student:-LinearAlgebra

> $C1 := MultiplyRow\left(C, 1, -\frac{1}{25}\right)$

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 51 & -44 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.4)}$$

> $C2 := AddRow(C1, 2, 1, -51)$

$$C2 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & \frac{2776}{25} & \frac{51}{25} & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.5)}$$

> $C3 := MultiplyRow\left(C2, 2, \frac{25}{2776}\right)$

$$C3 := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{76}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{51}{2776} & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.6)}$$

> $C4 := AddRow\left(C3, 1, 2, \frac{76}{25}\right)$

$$C4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{694} & \frac{19}{694} \\ 0 & 1 & \frac{51}{2776} & \frac{25}{2776} \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.7)}$$

Trabajando con las propiedades de los determinantes

En los siguientes ejercicios vas a trabajar con las propiedades de los deteminantes y con las distintas maneras de calcularlos.
El comando Maple para calcular el determinante de la matriz A es det(A).

Si la matriz tiene dimensiones muy grandes puede ser adecuado efectuar operaciones elementales en la matriz que o bien no modifiquen el determinante o lo alteren solo en una constante.
Tendrás que tener en cuenta esas modificaciones para poder dar luego el valor del determinante.

Ejercicio 8

Define las matrices A:= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y B:= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y comprueba si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones.
En el caso de que sean falsas dí cuál es el valor de cada uno de los miembros en esas expresiones.
a) |A|+|B|=|A+B|
b) |A*B|=|A|*|B|
c) |trasp(A)|=|A|
d) |inversa(A)|= 1/|A|

Solución

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (15.1.1)$$

> $det(A); det(B); det(A+B), det(A)+det(B)$

#la afirmación a) es falsa

$$-2$$
$$-6$$
$$-14, -8 \quad (15.1.2)$$

> $A.B$

$$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 13 & 8 \\ 10 & 14 & 11 & 10 \\ 19 & 26 & 21 & 12 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (15.1.3)$$

> $det(\%)$

$$12 \quad (15.1.4)$$

> $det(A) \cdot det(B)$ *#la afirmacion b) es cierta*

$$12 \quad (15.1.5)$$

> $det(A); det(A^{+})$ *#la afirmación c) es cierta*

$$-2$$
$$-2 \quad (15.1.6)$$

> $det(A); det(A^{-1})$ *#la afirmación d) es cierta*

$$-2$$
$$-\frac{1}{2} \quad (15.1.7)$$

Ejercicio 9

Calcula el determinante de la matriz A:= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ usando operaciones elementales en las filas de la matriz, de forma que obtengas una matriz triangular. Usa para ello los comandos AddRow, MultiplyRow y SwapRow de Maple.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.1.1}$$

> $\det(A)$

$$22 \tag{16.1.2}$$

> $A1 := MultiplyRow\left(A, 1, \frac{1}{3}\right)$ #El determinante de A es 3·det(A1)

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.1.3}$$

> $A2 := AddRow(A1, 2, 1, -3)$
#El determinante no cambia det(A2)=det(A1)

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.1.4}$$

> $A3 := AddRow(A2, 3, 1, -1)$
#El determinante no cambia det (A2)=det(A3)

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \frac{17}{3} \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16.1.5}$$

> $A4 := AddRow(A3, 4, 1, -2)$ #El determinante no cambia det(A3)=det(A4)

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -3 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \tag{16.1.6}$$

> $A5 := SwapRow(A4, 2, 3)$
#El determinante cambia de signo luego $\det(A4) = -\det(A5)$

$$A5 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -3 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \tag{16.1.7}$$

> $A6 := MultiplyRow\left(A5, 2, \frac{3}{7}\right)$ #se tiene det(A5)=$\frac{7}{3}\det(A6)$

$$A6 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -3 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \tag{16.1.8}$$

> $A7 := AddRow\left(A6, 4, 2, \frac{1}{3}\right)$ #el determinante no cambia det(A6)=det(A7)

$$A7 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \tag{16.1.9}$$

> $A8 := MultiplyRow\left(A7, 3, \frac{-1}{2}\right)$#se tiene det(A7)=-2det(A8)

$$A8 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \quad \textbf{(16.1.10)}$$

> $A9 := AddRow\left(A8, 4, 3, \frac{17}{7}\right)$ *#det(A8)=det(A9)*

$$A9 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{12}{7} & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{7} \end{bmatrix} \quad \textbf{(16.1.11)}$$

A9 es triangular,luego det(A9) es el producto de los elementos de la diagonal, det(A9)=11/7, y entonces juntando todo tenemos: det(A)=3det(A1)=-3det(A5)=-7det(A6)=14det(A9)=14(11/7) luego det (A)=22

Rangos de conjuntos de vectores y rangos de matrices

El rango de un conjunto de vectores es el nº de elementos del mayor subconjunto de ellos formado por vectores linealmente independientes.
Si se colocan esos vectores por filas (o columas) en una matriz, el rango del conjunto de vectores coincide con el rango de la matriz.
Por tanto el rango de una matriz es el nº máximo de vectores fila (o columna) linealmente independientes.
El rango es también la dimensión de la mayor submatriz cuadrada de la matriz con determinante no nulo.
Finalmente también se puede hallar el rango reduciendo la matriz a su forma escalonada mediante operaciones elementales. Será entonces el número de elementos pivote.
Para hallar el rango de una matriz A usa el comando Rank. Para que tenga efecto deberás cargar primero el paquete de estudiante de Álgebra Lineal.

Ejercicio 10

Halla el rango de los vectores x=(1,2,3,4,1), y=(-1,2,3,1,0), z=2x+y, w=(9, 10,15,16,7).
Comprueba que se cumple que si añades a esos vectores otro que sea combinación lineal de ellos el rango no varía.

Solución

> $x := \langle 1, 2, 3, 4, 1\rangle;\ y := \langle -1, 2, 3, 1, 0\rangle;\ z := 2\cdot x + y;\ w := \langle 9, 10, 15, 16, 7\rangle$

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad z := \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix} \quad w := \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 15 \\ 16 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(18.1.1)}$$

> $A := \langle x | y | z | w\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & 9 & 15 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(18.1.2)}$$

> $Rank(A)$

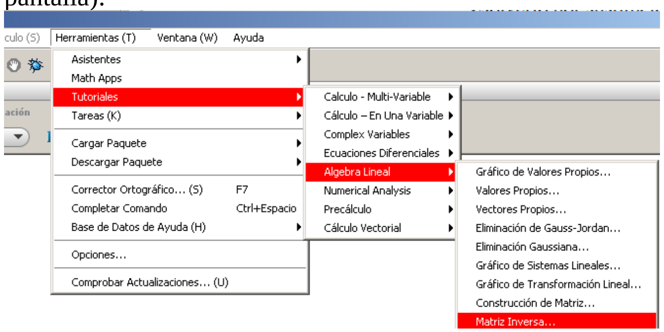
$$3 \quad \textbf{(18.1.3)}$$

> $Rank(\langle A | x - y + z - w\rangle)$

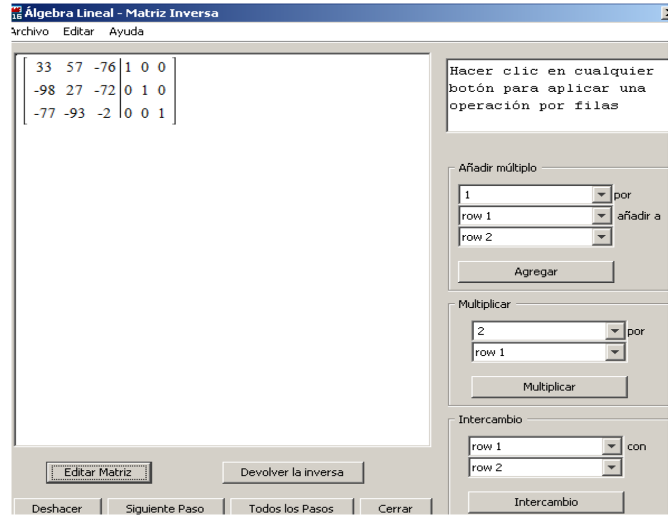
3 (18.1.4)

Usando los tutoriales de Maple

Maple dispone de tutoriales para calcular inversas, efectuar la eliminación Gaussiana, resolver sistemas ...
Para acceder a los tutoriales tienes que ir a
Herramientas/Tutoriales/AlgebraLineal
y ahi seleccionar el que quieras usar.
Por ejemplo si seleccionas el de Matriz inversa (abajo tienes la captura de pantalla):



te encontrarás con una ventana como la que aparece debajo



donde puedes introducir tú la matriz que quieras y hacer cada uno de los pasos por tu cuenta o pedirle a Maple que te los vaya haciendo paso a paso. Como ves, es mucho más cómodo usar el tutorial que ir introduciendo cada una de las instrucciones como hemos ido haciendo anteriormente.

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 2

- **Resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Visualizando sistemas de dos y tres ecuaciones con tres incógnitas.**
- **Ejercicio 1**
- **Ejercicio 2**
- **Reducción de una matriz a su forma escalonada para hallar el rango**
- **Ejercicio 3**
- **Ejercicio 4**
- **Proyecciones ortogonales.**
- **Ejercicio 5**
- **Ejercicio 6**
- **Soluciones aproximadas de ecuaciones lineales (solución mínimo cuadrática)**
- **Ejercicio 7**
- **Ejercicio 8**
- **Ejercicio 9**
- **Método de ortogonalización de Gram-Schmidt**
- **Ejercicio 10**

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 2

Resolviendo sistemas de ecuaciones lineales. Visualizando sistemas de dos y tres ecuaciones con tres incógnitas.

El comando para resolver sistemas de ecuaciones lineales es LinearSolve(A, b) donde A es la matriz de coeficientes y b el vector de términos independientes. Antes tienes que cargar el paquete de estudiante de Álgebra Lineal.

Ejercicio 1

Dí cuáles de los siguientes sistemas son escalonados. Si no lo son conviértelos en escalonados y dí si tienen solución. En caso afirmativo halla la solución.

a) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_5+x_6=4 \\ x_3-x_4+x_5=2 \\ x_5+x_6=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_3+2x_4-x_5=0 \\ 2x_3+x_4+3x_5=0 \\ x_4+x_5=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ x_2+x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2+x_5=3 \\ x_1+4x_2+3x_3-3x_4+x_5=0 \end{cases}$

Solución

> $A1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:; $b1 := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$:; $A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$: ; $b2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$:; $A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$:; $b3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Solo el primero de ellos es escalonado. Resolvemos primero los sistemas:

Cargando Student:-LinearAlgebra

> *LinearSolve*(*A1*, *b1*, *free* ='x')

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{2}\,x_1+\frac{3}{2} \\ 1+x_4+x_6 \\ x_4 \\ 1-x_6 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

Vemos que es un sistema compatible determinado con 3 grados de libertad.

> *LinearSolve*(*A2*, *b2*, *free* ='x')

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4}-x_2 \\ x_2 \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

Vemos que es un sistema compatible indeterminado con un grado de libertad.

> *LinearSolve*(*A3*, *b3*, *free* ='x'); *A3*

```
Error, (in LinearAlgebra:-LinearSolve) inconsistent system
```

Maple nos indica que este es un sitema incompatible, que no tiene solución.

Ahora convertimos en escalonada la matriz ampliada. Sería inmediato resolverlos después por ejemplo por inducción hacia atrás.

> *LinearAlgebra*:-*GaussianElimination*(⟨*A2*|*b2*⟩, '*method* = *FractionFree*')

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -6 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

Vemos que el número de filas no nulas de la matriz y de la ampliada coinciden luego es un sistema compatible. Como hay 5 variables y 4 filas no nulas hay 1 grado de libertad.

```
> LinearAlgebra:-GaussianElimination(⟨A3|b3⟩, 'method = FractionFree')
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

```
>
```

En este caso comprobamos lo que ya habíamos visto con anterioridad, que éste es un sistema incompatible. El número de filas no nula de la matriz, y de la matriz ampliada son distintos.

Ejercicio 2

Este es un ejercicio sencillo de visualización de los sistemas de ecuaciones lineales.

a) Dibuja los planos

x+2y+3z = 6
-x+4y+z = 8

primero en gráficos separados y luego en el mismo gráfico.

b) Resuelve el sistema anterior y dibuja en el gráfico anterior los puntos solución. ¿Qué observas?

Indicaciones: para representar planos en el espacio puedes usar el comando plot3d para representar funciones de dos variables, pues los planos son las gráficas de las funciones lineales de dos variables. También puedes usar el comando "implicitplot3d". Si la solución del sistema tiene un solo grado de libertad es una recta. Para representarla, si está en forma paramétrica, puedes usar el comando "spacecurve".

c) Dibuja los planos

x+2y+3z = 6
-x+4y+z = 8
-x-6y-z = -10

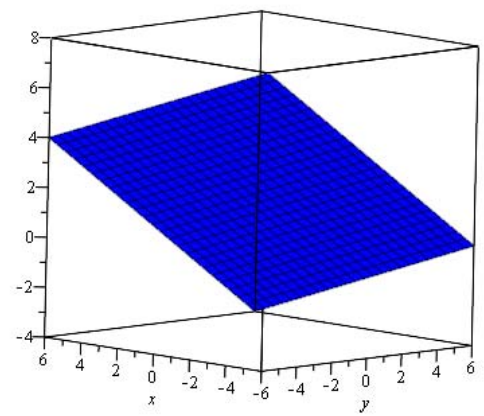
en un mismo gráfico. A la vista del gráfico ¿cuál crees que el rango de la matriz de los coeficientes?

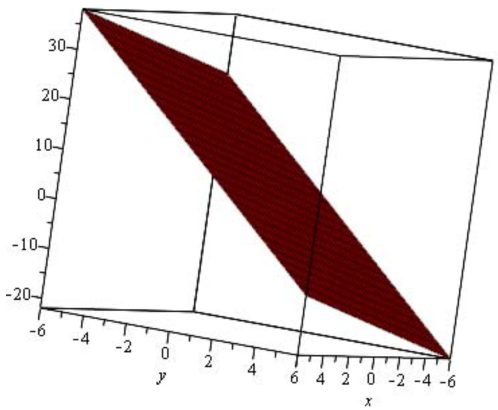
Solución

a)

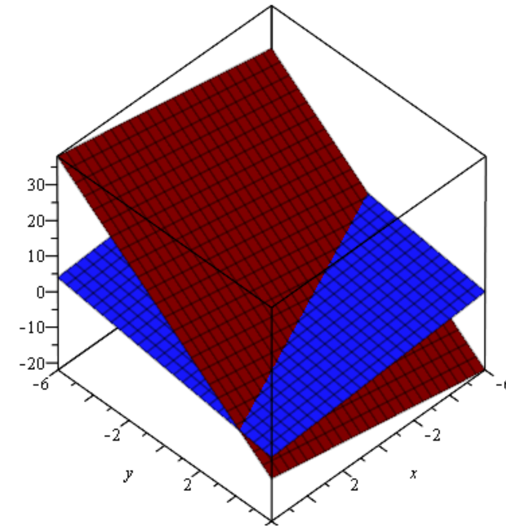
Lo hacemos primero con plot3d:

```
> d1 := plot3d((6 - 2·y - x)/3, x = -6..6, y = -6..6, color = blue) :
> d2 := plot3d(8 + x - 4·y, x = -6..6, y = -6..6, color = red) :
> with(plots) :
> display(d1); display(d2); display(d1, d2)
```





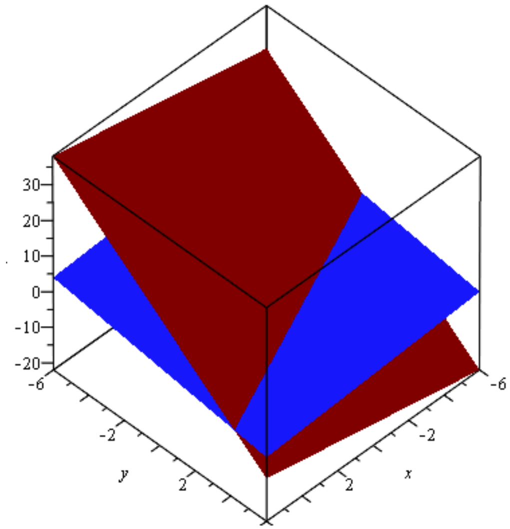
Y ahora con el comando implicitplot3d, con lo que obtenemos el mismo resultado.



> $a1 := \mathit{implicitplot3d}(x+2\cdot y+3\cdot z=6, x=-6..6, y=-6..6, z=-10..10, \mathrm{style}=\mathrm{surface}, \mathrm{color}=\mathrm{blue}):$

> $a2 := \mathit{implicitplot3d}(-x+4\cdot y+z=8, x=-6..6, y=-6..6, z=-30..40, \mathrm{style}=\mathrm{surface}, \mathrm{color}=\mathrm{red}):$

> $\mathit{display}(a1, a2)$



b)

> $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$; $b := \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

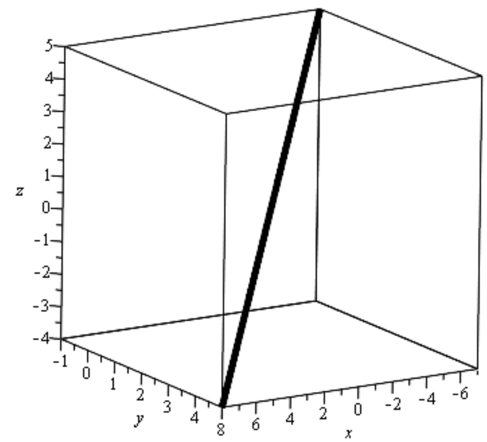
$$b := \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{3.1.2.1}$$

> $sol := LinearSolve(A, b, free='x')$

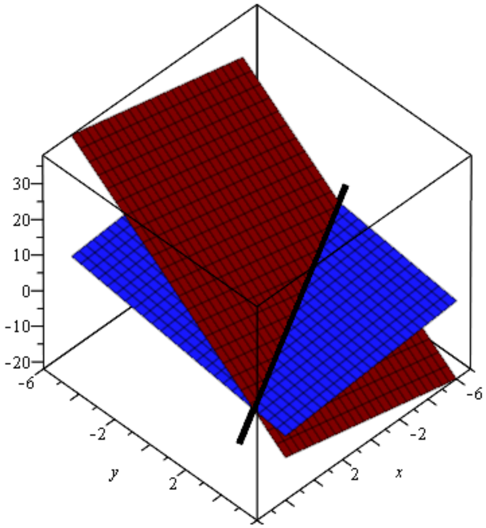
$$sol := \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\, x_2 \\ x_2 \\ \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\, x_2 \end{bmatrix} \tag{3.1.2.2}$$

> $d3 := spacecurve(\mathrm{sol}, x_2 = -1\,..5, thickness = 5, color = black)$:

> $display(d3)$



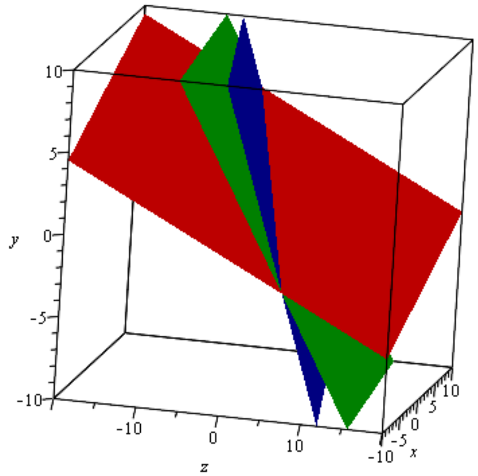
> $display(d1, d2, d3)$



Observamos que las soluciones del sistema son los puntos que están simultáneamente en los dos planos, que es la recta en la que se intersecan ambos planos.

c)

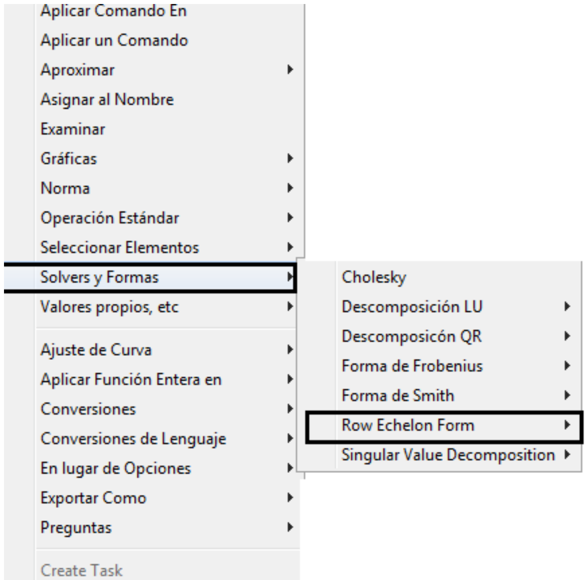
```
> a1 := implicitplot3d(x + 2 ·y + 3· z = 6, x =-10..10, y =-10..10, z =-20..20, style
    = surface, color = blue) :
> a2 := implicitplot3d(-x + 4 ·y + z = 8, x =-10..10, y =-10..10, z =-20..20, style
    = surface, color = red) :
> a3 := implicitplot3d(x + 8 ·y + 7·z = 20, x =-10..10, y =-10..10, z =-20..20, style
    = surface, color = green) :
> display(a1, a2, a3)
```

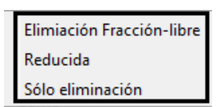


Los tres planos se cortan en una recta, el espacio de soluciones tiene un grado de libertad, luego el rango de la matriz de los coeficientes es 2.

Reducción de una matriz a su forma escalonada para hallar el rango

Para reducir una matriz a su forma escalonada usa el botón derecho del ratón, y busca en "Solvers and Formas" "Echelon Row form".





Verás que hay tres opciones. Analiza las diferencias entre ellas.

Ejercicio 3

Define una matriz aleatoria 4x6. Halla su rango reduciéndola a su forma escalonada usando las tres opciones que te proporciona Maple. ¿Qué diferencia ves entre ellas?

Solución

$$> \begin{bmatrix} -38 & -98 & -93 & -32 & 8 & 44 \\ -18 & -77 & -76 & -74 & 69 & 92 \\ 87 & 57 & -72 & -4 & 99 & -31 \\ 33 & 27 & -2 & 27 & 29 & 67 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -38 & -98 & -93 & -32 & 8 & 44 \\ -18 & -77 & -76 & -74 & 69 & 92 \\ 87 & 57 & -72 & -4 & 99 & -31 \\ 33 & 27 & -2 & 27 & 29 & 67 \end{bmatrix} \quad (5.1.1)$$

> *LinearAlgebra:-GaussianElimination*(**(5.1.1)**, *'method = GaussianElimination'*)

$$\begin{bmatrix} -38 & -98 & -93 & -32 & 8 & 44 \\ 0 & -\frac{581}{19} & -\frac{607}{19} & -\frac{1118}{19} & \frac{1239}{19} & \frac{1352}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{127893}{1162} & \frac{142228}{581} & -\frac{19887}{83} & -\frac{185765}{581} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7924331}{127893} & -\frac{1702904}{42631} & \frac{4358072}{127893} \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

> *LinearAlgebra:-GaussianElimination*(**(5.1.2)**, *'method = FractionFree'*)

$$\begin{bmatrix} -38 & -98 & -93 & -32 & 8 & 44 \\ 0 & 1162 & 1214 & 2236 & -2478 & -2704 \\ 0 & 0 & -127893 & 284456 & -278418 & -371530 \\ 0 & 0 & 0 & -7924331 & 5108712 & -4358072 \end{bmatrix} \quad (5.1.3)$$

> *LinearAlgebra:-ReducedRowEchelonForm*(**(5.1.3)**)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{22317012}{7924331} & \frac{64417651}{7924331} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{13220147}{7924331} & -\frac{61003466}{7924331} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5888302}{7924331} & \frac{32713334}{7924331} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5108712}{7924331} & \frac{4358072}{7924331} \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

>

Ejercicio 4

Halla el rango de la matriz A=

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 & a-2b \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$ en función de los parámetros a y b, reduciendo la matriz a su forma escalonada.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 & a-2\cdot b \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 & a-2b \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.1.1)}$$

> *LinearAlgebra:-GaussianElimination*(**(6.1.1)**, 'method = FractionFree')

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 & a-2b \\ 0 & 3-2b & 2 & 0 & 1-2a+4b \\ 0 & 0 & 2-2b & 0 & -5+b+a \end{bmatrix} \quad \textbf{(6.1.2)}$$

>

Vemos que si b=1 y a=4 entonces el rango es 2, en caso contrario el rango es 3.

Proyecciones ortogonales.

La proyección ortogonal de un vector v sobre un subespacio (una recta, plano, etc que pasa por el origen) se obtiene considerando la matriz X que tiene por columna(s) el/los vectores linealmente independientes que generan esa recta, plano,...
Entonces la proyección del vector V sobre el subespacio es el vector PV donde P=X$(X^tX)^{-1}X^t$.
La matriz P anterior es una matriz idempotente, y es la matriz de proyección, proyecta los vectores del espacio ambiente sobre el subespacio dado.

Ejercicio 5

Halla la matriz de proyección de un vector del espacio sobre la recta que pasa por el origen y tiene dirección (1,2,-4). ¿Cuál es la proyección del vector w=(1,1,1) sobre esta recta? Comprueba que la matriz de proyección es idempotente.

Solución

> $X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}; w := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$w := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.1)}$$

> $P := X.(X^+.X)^{-1}.X^+$

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{8}{21} \\ -\frac{4}{21} & -\frac{8}{21} & \frac{16}{21} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.2)}$$

> $P.w$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{21} \\ -\frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.3)}$$

> *evalf*(%)

$$\begin{bmatrix} -0.04761904762 \\ -0.09523809524 \\ 0.1904761905 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.4)}$$

> $P^2 - P$

$$\textbf{(8.1.5)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.5)}$$

Podíamos haber calculado la matriz de proyección usando el comando Maple "ProjectionMatrix"

> $with(LinearAlgebra):$

> $S := [X]$

$$S := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}\right] \quad \textbf{(8.1.6)}$$

> $P := ProjectionMatrix(S)$

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{4}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{8}{21} \\ -\frac{4}{21} & -\frac{8}{21} & \frac{16}{21} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.7)}$$

Ejercicio 6

a) Halla la matriz de proyección de los vectores de $\mathbb{R}^4$ sobre el plano que pasa por el origen y generado por los vectores (1,1,0,0) y (0,1,0,0).
b) ¿Cuál es el vector que se obtiene al proyectar ortogonalmente el vector (1,2,3,4) en ese plano?
c) Comprueba que la matriz de proyección es idempotente.

Solución

a)

Definimos primero la matriz X que tiene por columnas esos vectores, y a continuación la matriz P de proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre ese plano

> $X := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; P := X.(X^{+}.X)^{-1}.X^{+}$

$$X := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.1.1)}$$

Podíamos haber calculado la matriz de proyección usando el comando Maple "ProjectionMatrix"

> $with(LinearAlgebra):$

> $S := X\{1\}$

$$S := \{1\} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.1.2)}$$

> $S := [X(1..4, 1), X(1..4, 2)]$

$$S := \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \quad \textbf{(9.1.1.3)}$$

> $P := ProjectionMatrix(S)$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.1.4)}$$

b)

> $P.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(9.1.2.1)

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.2.1)}$$

c)

Comprobamos que el cuadrado de P coincide con P

> $P^2 - P$

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \textbf{(9.1.3.1)}$$

Soluciones aproximadas de ecuaciones lineales (solución mínimo cuadrática)

Si tenemos un sistema lineal de ecuaciones que no tiene solución, una solución aproximada se obtiene tomando como matriz X la matriz que se obtiene eliminando de la matriz de coeficientes del sistema las columnas que son linealmente dependientes y como vector V el vector de términos independientes del sistema. Entonces la solución aproximada es

$$(X^t X)^{-1} X^t V.$$

La solución aproximada de un sistema de ecuaciones (solución mínimo cuadrática) también puede hallarse usando el comando de Maple "LeastSquares". Usa el manual de ayuda para ver cómo usarlo.

Ejercicio 7

a) Dí si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución.
x+y = 1
2x+2y = 3
x-y = 4
x+2y = 1
En caso de que no la tenga busca una solución aproximada, y estudia el error cuadrático medio que comete la solución aproximada.
b) Usa el comando de Maple "LeastSquares" y comprueba que obtienes el mismo resultado.
c) Genera aleatoriamente un vector contenido en el subespacio generado por las columnas de la matriz de coeficientes del sistema y comprueba está más alejado del vector de términos independientes que el vector que te proporciona la solución hallada en el apartado a).

Solución

a)

Es inmediato ver que la matriz de coeficientes del sistema tiene rango 2.

> $A := \begin{bmatrix}1&1\\2&2\\1&-1\\1&2\end{bmatrix}; b := \begin{bmatrix}1\\3\\4\\1\end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix}1&1\\2&2\\1&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix}1\\3\\4\\1\end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1.1)}$$

> $sol\_aprox := (A^+ . A)^{-1} . A^+ . b$

$$sol\_aprox := \begin{bmatrix}\frac{45}{17}\\-\frac{37}{34}\end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1.2)}$$

> $evalf(\%)$

$$\begin{bmatrix}2.647058824\\-1.088235294\end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1.3)}$$

Ya hemos hallado la solución. El vector más cercano al vector de términos independientes es:

> $evalf(A.sol\_aprox)$

$$\begin{bmatrix}1.558823529\\3.117647059\\3.735294118\\0.4705882353\end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1.4)}$$

El vector diferencia al vector de términos independientes es:

> $A.sol\_aprox - b$

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{34} \\ \frac{2}{17} \\ -\frac{9}{34} \\ -\frac{9}{17} \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.1.5)}$$

cuya norma es

> $evalf(LinearAlgebra:\text{-}VectorNorm(\%, Euclidean))$

$$0.8224783210 \quad \textbf{(11.1.1.6)}$$

b)

Veamos que el comando "LeastSquares" de Maple proporciona el mismo resultado:

> $v := (LeastSquares(A, b))$

$$v := \begin{bmatrix} \frac{45}{17} \\ -\frac{37}{34} \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.2.1)}$$

> $sol\_aprox - v$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.2.2)}$$

c)

Generamos aleatoriamente un vector s en el plano, el vector A.s es un vector en el subespacio generado por las columnas de la matriz de coeficientes. Posteriormente calculo su distancia al vector de términos independientes.

> $s := \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.03 \end{bmatrix}:$

> $A.s$

$$\begin{bmatrix} 0.0700000000000000 \\ 0.140000000000000 \\ 0.130000000000000 \\ 0.0400000000000000 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.3.1)}$$

> $A.s - b$

$$\begin{bmatrix} -0.930000000000000 \\ -2.86000000000000 \\ -3.87000000000000 \\ -0.960000000000000 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11.1.3.2)}$$

> $evalf(LinearAlgebra:\text{-}VectorNorm(\%, Euclidean))$

$$4.994296747 \quad \textbf{(11.1.3.3)}$$

Ejercicio 8

Genera aleatoriamente una matriz de A de 7 filas y 5 columnas y un vector b de dimensión 7. Estudia si el sistema Ax=b tiene solución y en caso negativo halla una solución aproximada.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} 88 & -32 & 18 & 22 & -20 \\ -82 & -1 & -59 & 14 & -25 \\ -70 & 52 & 12 & 16 & 51 \\ 41 & -13 & -62 & 9 & 76 \\ 91 & 82 & -33 & 99 & -44 \\ 29 & 72 & -68 & 60 & 24 \\ 70 & 42 & -67 & -95 & 65 \end{bmatrix} :; b := \begin{bmatrix} 86 \\ 20 \\ -61 \\ -48 \\ 77 \\ 9 \\ 31 \end{bmatrix}:$

> $with(LinearAlgebra):$

> $Rank(A); Rank(\langle A|b \rangle)$

$$5$$
$$6 \quad \textbf{(12.1.1)}$$

El sistema es incompatible. Buscamos una solución aproximada.

> $sol\_aprox := (A^{+}.A)^{-1}.A^{+}.b$

$$sol\_aprox := \begin{bmatrix} \frac{18230243075540690547}{37996966320308534792} \\ \frac{455331202290393997}{3454269665482594072} \\ -\frac{6232674907422820763}{18998483160154267396} \\ -\frac{9413934770942793195}{37996966320308534792} \\ -\frac{18382475599290034537}{18998483160154267396} \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.2)}$$

> evalf(%)

$$\begin{bmatrix} 0.4797815416 \\ 0.1318169241 \\ -0.3280617118 \\ -0.2477549047 \\ -0.9675759609 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.3)}$$

Esta solución proporciona el vector w=A*sol_aprox del subespacio generado por las columnas de A que está más próximo al vector de términos independientes. Hallamos cuál es ese vector y la distancia al vector de términos independientes.

> w := evalf(A.sol_aprox)

$$w := \begin{bmatrix} 45.99843459 \\ 0.6025680217 \\ -83.97742088 \\ -37.46831785 \\ 83.34075126 \\ 7.625562298 \\ 21.74543190 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.4)}$$

> evalf(w - b)

$$\begin{bmatrix} -40.0015654100000 \\ -19.3974319783000 \\ -22.9774208800000 \\ 10.5316821500000 \\ 6.34075125999999 \\ -1.37443770200000 \\ -9.25456810000000 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.5)}$$

> evalf(LinearAlgebra:-VectorNorm(%, Euclidean))

Ejercicio 9

Los siguientes datos corresponden a consumo (C) y renta (X) en los años 2000-2009.

Año X C
2000, 8559.4, 6830.4
2001, 8883.3, 7148.8
2002, 9060.1, 7439.2
2003, 9378.1, 7804.0
2004, 9937.2, 8285.1
2005, 10485.9, 8819.0
2006, 11268.1, 9322.7
2007, 11894.1, 9826.4
2008, 12238.8, 10129.9
2009, 12030.3, 10088.5

a) Busca las constantes a y b de forma que la recta

C=a+bX

sea la que mejor aproxima a estos datos, en el sentido mínimo cuadrático, sin usar los comandos de Maple que lo realizan directamente.
b) Representa estos datos y la recta obtenida.
c) Repite los apartados anteriores usando el comando "LeastSquares"

Solución

a)

> restart; with(plots) :

Se trata de resolver el sistema de 10 ecuaciones con 2 incógnitas que se obtienen al considerar

Ci=a+bXi, i=1..10

La matriz de coeficientes de este sistema es Xdatos y el vector de términos independientes C

> $Xdatos := \begin{bmatrix} 1 & 8559.4 \\ 1 & 9060.1 \\ 1 & 9060.1 \\ 1 & 9378.1 \\ 1 & 9937.2 \\ 1 & 10485.9 \\ 1 & 11268.1 \\ 1 & 11894.1 \\ 1 & 12238.8 \\ 1 & 12030.3 \end{bmatrix} : ; C := \begin{bmatrix} 6830.4 \\ 7148.8 \\ 7439.2 \\ 7804.0 \\ 8285.1 \\ 8819.0 \\ 9322.7 \\ 9826.4 \\ 10129.9 \\ 10088.5 \end{bmatrix} :$

Hallamos la solución aproximada para este sistema:

> $sol\_aprox := (Xdatos^{+}.Xdatos)^{-1}.Xdatos^{+}.C$

$$sol\_aprox := \begin{bmatrix} -716.601245741835 \\ 0.893640032849084 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(13.1.1.1)}$$

La recta pedida es $C = -716.601245741835 + 0.893640032849084\, X$

b)

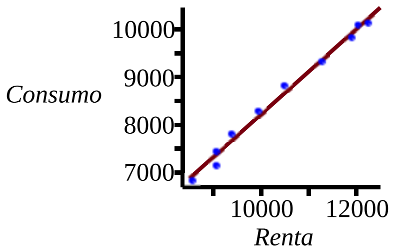
> $op2d := font = [bold, 15], labelfont = [bold, 15], tickmarks = [6, 6], thickness = 3, axis = [thickness = 3], scaling = constrained :$

> $d1 := plot(sol\_aprox(1) + sol\_aprox(2) \cdot x, x = 8500..12500, labels = [Renta, Consumo], op2d) :$

> $a := seq([Xdatos(k, 2), C(k)], k = 1..10) :$

> $d2 := pointplot(\{a\}, style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = blue) :$

> $display(d1, d2)$



c)

Hay comandos de Maple para hacer el ajuste mínimo cuadrático y el gráfico.

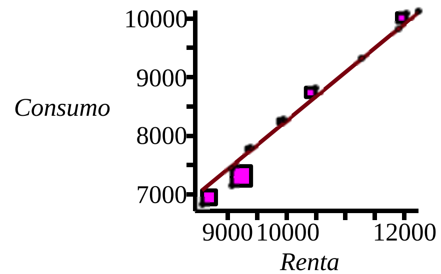
> $with(Student[LinearAlgebra])$

> $LeastSquares(Xdatos, C)$

$$\begin{bmatrix} -716.6012226 \\ 0.8936400308 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(13.1.3.1)}$$

> $X := [seq([Xdatos(i, 2), C(i)], i = 1..10)]$

> $LeastSquaresPlot\left(X, [x, y], curve = a + b\ x, boxoptions = [color = magenta], caption = \text{" "}, labels = [Renta, Consumo], op2d\right)$



Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Recordamos que la matriz de proyección de los vectores del espacio ambiente sobre un determinado subespacio es

$$P = X.(X^{+}.X)^{-1}.X^{+}$$

donde X es la matriz que tiene por columnas una base de dicho subespacio. Vemos la forma sistemática de encontrar una base ortogonal g1,g2,....,gk para el subespacio S generado por una base no ortogonal f1,f2,...,fk. Tomamos como primer vector de la base ortogonal

$$g_1 = f_1.$$

El segundo vector de la base es

$$g_2 = f_2 - h_2; \quad h_2 = P_1 f_2$$

donde h_2 es la proyección de f_2 sobre el espacio generado por g_1, y P_1 es la matriz de proyección sobre el subespacio generado por g_1.

El tercer vector es

$$g_3 = f_3 - h_3; \quad h_3 = P_2 f_3$$

donde h_3 es la proyección de f_3 sobre el espacio generado por $\{g_1, g_2\}$ y P_2 es la matriz de proyección sobre este subespacio.

En general el n-ésimo vector de la base ortogonal es

$$g_n = f_n - h_n; \quad h_n = P_{n-1} f_n$$

donde h_n es la proyección de f_n sobre el espacio generado por $\{g_1, g_2, \ldots g_{n-1}\}$ y P_{n-1} es la matriz de proyección sobre este subespacio.

Otra manera de obtener una base ortogonal es usando el comando "*GramSchmidt*" de Maple

Ejercicio 10

a) Halla una base ortogonal para el espacio generado por los vectores: f1=(-1/2,1,0,0), f2=(1/2,0,1,0), f3=(1/2,0,0,1).

b) Usa el comando "*GramSchmidt*" para hallar esa base ortogonal

c) Completa la base anterior para hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$

Solución

a)

Definimos los vectores de la base inicial comprobando que son base

> $f1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; f2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; f3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15.1.1.1)}$$

> $A := \langle f1 | f2 | f3 \rangle$

$$A := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15.1.1.2)}$$

> $with(LinearAlgebra):$

> $Rank(A)$

$$3 \qquad \textbf{(15.1.1.3)}$$

Empezamos tomando como primer vector g1 de la base ortogonal g1= f1 , hallando la matriz de proyección P1 sobre g1.

> $g1 := f1 :; X := g1$

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15.1.1.4)}$$

> $P1 := X.(X^+.X)^{-1}.X^+$

$$P1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(15.1.1.5)}$$

Para construir el segundo vector de la base proyectamos ortogonalmente f2 sobre g1. Basta multiplicar f2 por P1. El siguiente vector de la base es g2=$f_2 - P_1 f_2$

> $g2 := f2 - P1.f2$

$$g2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15.1.1.6)}$$

Comprobamos la ortogonalidad de g1 y g2

> $g1^{+}.g2$

$$0 \quad \textbf{(15.1.1.7)}$$

¡Observa el punto de multiplicación de matrices antes de g2!
Lo que hemos hecho es multiplicar g1 escrito como matriz fila por g2, es decir, hemos formado el producto escalar de g1 por g2, y sale 0, luego esos dos vectores son perpendiculares.
Ya tenemos dos vectores ortogonales para nuestra base.
Vamos por el tercero. Construimos la matriz de proyección P2 sobre el espacio generado por g1 y g2. Para construir el tercer vector le restamos a f3 su proyección ortogonal sobre el subespacio generado por {g1,g2}. Construimos primero la matriz P2 de proyección sobre este subespacio.

> $X := \langle g1 | g2 \rangle$

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15.1.1.8)}$$

> $P2 := X.(X^{+}.X)^{-1}.X^{+}$

$$P2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15.1.1.9)}$$

> $g3 := f3 - P2.f3$

$$g3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15.1.1.10)}$$

Comprobamos la ortogonalidad de g3 con cualquier vector del subespacio generado por g1 y g2, lo que incluye que es ortogonal a g1 y a g2.

> $g3^{+}.(a \cdot g1 + b \cdot g2)$

$$0 \quad \textbf{(15.1.1.11)}$$

> $g1; g2; g3$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(15.1.1.12)}$$

b)

> $f1 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:; $f2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$:; $f3 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

> with(LinearAlgebra) :

> GramSchmidt([f1, f2, f3])

$$\left[\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}\right] \tag{15.1.2.1}$$

c)

Ahora podemos completar la base que hemos encontrado añadiendo un último vector ortogonal a g1,g2 y g3, obteniendo así una base de todo $\mathbb{R}^4$. Formamos la matriz P3 de proyección sobre el subespacio S que generan los vectores g1,g2,g3.

> $X := \langle g1|g2|g3 \rangle$

$$X := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15.1.3.1}$$

La matriz de proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre S es

> $P3 := X.(X^+.X)^{-1}.X^+$

$$P3 := \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \tag{15.1.3.2}$$

Proyectamos sobre S cualquier vector que no esté en S. Podemos coger por ejemplo f4= $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Comprobamos primero que no está en S

> $f4 := \langle 1, 0, 0, 0 \rangle$

$$f4 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{15.1.3.3}$$

> Rank($\langle g1|g2|g3|\, f4 \rangle$)

$$4 \tag{15.1.3.4}$$

Le restamos a f4 su proyección ortogonal sobre S

> $g4 := f4 - P3.f4$

$$g4 := \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \tag{15.1.3.5}$$

Comprobamos que es ortogonal a cualquier vector de S:

> $g4^+.(a \cdot g1 + b \cdot g2 + c \cdot g3)$

$$0 \tag{15.1.3.6}$$

Comprobamos que estos cuatro vectores forman una base de $\mathbb{R}^4$.

> Rank($\langle X|g4 \rangle$)

$$4 \tag{15.1.3.7}$$

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 3

- **Autovalores y autovectores y su visualización**
- **Ejercicio 1**
- **Ejercicio 2**
- **Ejercicio 3**
- **Ejercicio 4: los "trucos" de tus profesores.**
- **Aplicación: Sistemas dinámicos**
- **Ejercicio 5**
- **Aplicación: Autovalores y buscadores en páginas web**
- **Ejercicio 6**
- **Formas cuadráticas y su visualización**
- **Ejercicio 7**
- **Ejercicio 8**
- **Ejercicio 9**
- **Ejercicio 10**

ALGEBRA LINEAL CON MAPLE

PRACTICA 3

Autovalores y autovectores y su visualización

Los autovectores de una matriz A son los vectores v que cuando A actúa sobre ellos se transforman en vectores proporcionales a ellos mismos. El factor λ de proporcionalidad es el autovalor asociado a ese autovector. Obviamente si v es un autovector, lo es también cualquier vector proporcional a él, y con el mismo autovalor asociado.
A continuación consideramos todos los vectores del plano de longitud 1. Son los vectores con origen en el origen de coordenadas y extremo cualquier punto de la circunferencia unidad. Si dibujamos su transformado por la matriz A tomando como origen del vector ese punto de la circunferencia unidad, los autovectores son los vectores iniciales que se tranforman en vectores que están alineados con ellos. Maple tiene un comando que permite hacer esta visualización. Se denomina "EigenPlot".

Ejercicio 1

a) Calcula los autovalores y los autovectores de las siguientes matrices

$A1=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $A2=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $A3=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; $A4=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) Usa el comando EigenPlot para visualizar los autovectores de cada una de estas matrices.

Solución

a)

> $A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.1)$$

> LinearAlgebra:-Eigenvectors((2.1.1.1))

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.2)$$

> $A2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.3)$$

> LinearAlgebra:-Eigenvectors((2.1.1.3))

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.4)$$

> $A3:=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$;

$$A3 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.5)$$

> LinearAlgebra:-Eigenvectors((2.1.1.5))

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \\ -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{-4+\sqrt{7}} & \frac{3}{-4-\sqrt{7}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.6)$$

> $A4 := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A4 := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.7)$$

> LinearAlgebra:-Eigenvectors((2.1.1.7))

$$\begin{bmatrix} 2+3\,\mathrm{I} \\ 2-3\,\mathrm{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mathrm{I} & \mathrm{I} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.1.8)$$

b)

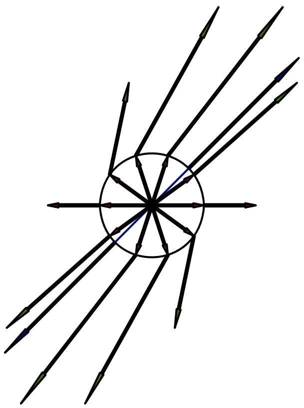
> with(Student[LinearAlgebra]) :

> $infolevel[Student[LinearAlgebra]] := 1 :$

> $EigenPlot(A1, showunitvectors, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: 1
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 0 >

Eigenvalue: 3
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 1 >
```

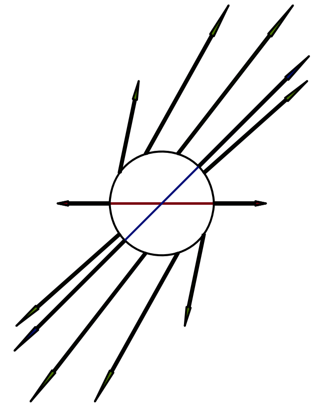


x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix A. Thus, x satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: unit vectors (purple), images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

> $EigenPlot(A1, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: 3
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 1 >

Eigenvalue: 1
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 0 >
```

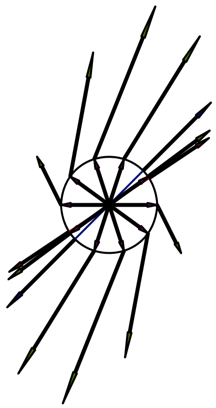



x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix A. Thus, x satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

> $EigenPlot(A2, showunitvectors, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: 3/2
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 3/2, 1 >

Eigenvalue: 2
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 1 >
```

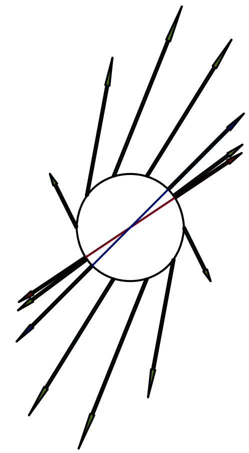


x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix *A*. Thus, *x* satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: unit vectors (purple), images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

> $EigenPlot(A2, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: 3/2
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 3/2, 1 >

Eigenvalue: 2
Multiplicity: 1
Eigenvector: < 1, 1 >
```

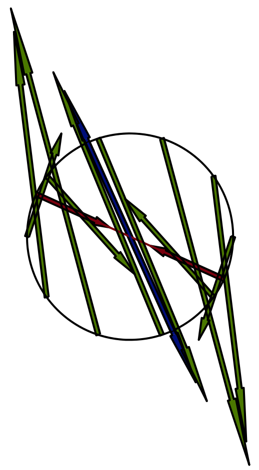



x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix *A*. Thus, *x* satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

> $EigenPlot(A3, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: -5/3+1/3*7^(1/2)
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -2.216, 1. >

Eigenvalue: -5/3-1/3*7^(1/2)
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -.4515, 1. >
```

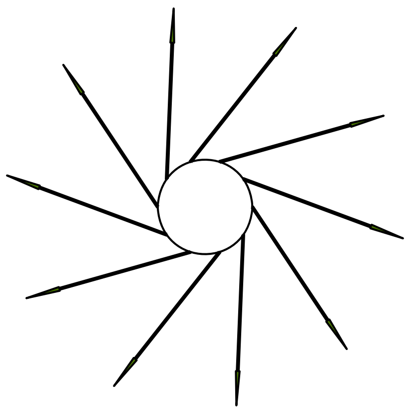


x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix *A*. Thus, *x* satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

> $EigenPlot(A4, numvectors = 10)$

```
Eigenvalue: 2+3*I
Multiplicity: 1
Eigenvector: < -I, 1 >

Eigenvalue: 2-3*I
Multiplicity: 1
Eigenvector: < I, 1 >
```

x is an eigenvector if it is collinear with its image under left-multiplication by a square matrix *A*. Thus, *x* satisfies the equation $A\,x = \lambda\,x$. Shown in the figure: images of unit vectors under left-multiplication by the given matrix (leafgreen), eigenvectors (burgundy and navy).

Ejercicio 2

Considera la matriz A= $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcula su polinomio característico. ¿De qué grado es? Halla los autovalores de A resolviendo la ecuación característica. Usa para ello el comando solve o fsolve.
b) Halla los autoespacios asociados a cada autovalor resolviendo los sistemas homogéneos con matriz A-λI para cada uno de los autovalores λ de A.
c) Encuentra una base de autovectores. Si P es la matriz que tiene por columnas los vectores de esa base y D es la matriz diagonal con los

autovalores correspondientes en la diagonal, demuestra que se cumple que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

d) Toma un vector v cualquiera y calcula v, Av, $A^2 v$, $A^{10} v$, $A^{50} v$, $A^{100} v$ ...
Repite la operación con otro vector w. Compara esos vectores con el autovector asociado al máximo de los autovalores ¿Qué observas?
e) Calcula A^{20} usando la diagonalización de A.

Solución

a)

> $A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix}$

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.1.1)}$$

> *LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial*(**(3.1.1.1)**, λ)

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 - \lambda^2 + 16\lambda - 12 \qquad \textbf{(3.1.1.2)}$$

> *fsolve*(%)

$$-2., 1., 2., 3. \qquad \textbf{(3.1.1.3)}$$

b)

> $ceros := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$ceros := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2.1)}$$

> *with*(*LinearAlgebra*) :

> *LinearSolve*($A + 2 \cdot M$, *ceros*, *free* ='v')

$$\begin{bmatrix} -2 v_4 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2.2)}$$

> *LinearSolve*($A - M$, *ceros*, *free* ='v')

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2.3)}$$

> *LinearSolve*($A - 2 \cdot M$, *ceros*, *free* ='v')

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2.4)}$$

> *LinearSolve*($A - 3 \cdot M$, *ceros*, *free* ='v')

$$\begin{bmatrix} -2 v_4 \\ 0 \\ -2 v_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.2.5)}$$

c)

> $P := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; Di := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$P := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Di := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.3.1)}$$

> $P.Di.P^{-1}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.3.2)}$$

> $A - P.Di.P^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.3.3)}$$

d)

Tomamos aleatoriamente un vector v y otro w

> $v := \begin{bmatrix} 72 \\ 42 \\ 18 \\ -59 \end{bmatrix}; w := \begin{bmatrix} 1 \\ 52 \\ -13 \\ 82 \end{bmatrix};$

$$v := \begin{bmatrix} 72 \\ 42 \\ 18 \\ -59 \end{bmatrix}$$

(3.1.4.1)

$$w := \begin{bmatrix} 1 \\ 52 \\ -13 \\ 82 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.4.1)}$$

> $A.v; A^2.v; A^{10}.v; A^{20}.v, A^{50}.v, A^{100}.v$

$$\begin{bmatrix} -54 \\ 42 \\ 54 \\ -19 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 378 \\ 42 \\ 162 \\ -281 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1118178 \\ 42 \\ 1062882 \\ -582641 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 62818742322 \\ 42 \\ 62762119218 \\ -31433488409 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1292216383925194156736617 8 \\ 42 \\ 1292216377845334659786448 2 \\ -646108194552166864106344 1 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(3.1.4.2)}$$

$$\begin{bmatrix} 927679537317620402710943274810557058945990848632 2 \\ 42 \\ 927679537317620395865630033578118290863793539601 8 \\ -463839768658810204271068017930206152915412796680 9 \end{bmatrix}$$

> $v := w$

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ 52 \\ -13 \\ 82 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.1.4.3)}$$

> $A.v; A^2.v; A^{10}.v; A^{20}.v, A^{50}.v, A^{100}.v$

$$\left[\begin{array}{c} -67 \\ 52 \\ -39 \\ \frac{397}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} -61 \\ 52 \\ -117 \\ \frac{721}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} -753301 \\ 52 \\ -767637 \\ \frac{922261}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c} -45313517149 \\ 52 \\ -45328197213 \\ \frac{45486532189}{2} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} -9332673824231484958216501 \\ 52 \\ -9332673839994083654013237 \\ \frac{9332674010004969587249461}{2} \end{array}\right], \tag{3.1.4.4}$$

$$\left[\begin{array}{c} -66999077695161472857268862837578649241735529107 49 \\ 52 \\ -669990776951614730347399468695307654512739778601 3 \\ \frac{669990776951614749488923532141571617112958179778 9}{2} \end{array}\right]$$

Observamos que a medida que n aumenta $A^n v$ tiende a alinearse (es proporcional) al autovector asociado al máximo autovalor.

e)

Al disponer de un ordenador no tenemos problemas para calcular la potencia de una matriz sin diagonalizarla previamente.

> $evalf(A^{20})$

$$\tag{3.1.5.1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1.048576\ 10^6 & 0. & 3.485735825\ 10^9 & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.486784401\ 10^9 & 0. \\ 0. & 0. & -1.742867912\ 10^9 & 1.048576\ 10^6 \end{array}\right] \tag{3.1.5.1}$$

Si queremos calcular su potencia usando su diagonalización hacemos

> $evalf(P.Di^{20}.P^{-1})$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1.048576\ 10^6 & 0. & 3.485735825\ 10^9 & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.486784401\ 10^9 & 0. \\ 0. & 0. & -1.742867912\ 10^9 & 1.048576\ 10^6 \end{array}\right] \tag{3.1.5.2}$$

Ejercicio 3

La mayoría de los ejercicios que aparecen en los libros de texto o que vemos en clase están "cocinados" para que los resultados sean sencillos. Si tomas una matriz al azar, lo normal es que tenga algunos autovalores complejos, y que los autovalores reales no sean valores enteros.

Compruébalo por tí mismo:

a) Genera aleatoriamente cinco matrices 2x2 no simétricas. ¿Cuántas tienen autovalores reales?

b) Genera tres matrices cuadradas, una de dimensión dos, otra de dimensión tres y otra de dimensión 4 y calcula sus autovalores.

Solución

a)

Genero las cinco matrices:

> $A1 := \left[\begin{array}{cc} 44 & -31 \\ 92 & 67 \end{array}\right]$:; $A2 := \left[\begin{array}{cc} 8 & 99 \\ 69 & 29 \end{array}\right]$:; $A3 := \left[\begin{array}{cc} -32 & -4 \\ -74 & 27 \end{array}\right]$:; $A4 := \left[\begin{array}{cc} -93 & -72 \\ -76 & -2 \end{array}\right]$:;
> $A5 := \left[\begin{array}{cc} -98 & 57 \\ -77 & 27 \end{array}\right]$:

> $LinearAlgebra\text{:-}Eigenvalues(\ A1)$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{111}{2} + \frac{1}{2}\, I\sqrt{10879} \\ \frac{111}{2} - \frac{1}{2}\, I\sqrt{10879} \end{array}\right] \tag{4.1.1.1}$$

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(A2)

$$\begin{bmatrix} \frac{37}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3085} \\ \frac{37}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3085} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.1.2)}$$

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(A3)

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4665} \\ -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4665} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.1.3)}$$

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(A4)

$$\begin{bmatrix} -\frac{95}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{30169} \\ -\frac{95}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{30169} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.1.4)}$$

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(A5)

$$\begin{bmatrix} -\frac{71}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{1931} \\ -\frac{71}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{1931} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.1.5)}$$

Nos han salido con autovalores complejos dos de las 5. Si esto lo repitíeramos con muchas matrices podríamos ver cuál es la probabilidad de que una matriz arbitraria 2x2 tenga autovalores reales.

b)

Genero las tres matrices de forma aleatoria pero con valores enteros.

$$> A := \begin{bmatrix} 44 & -31 \\ 92 & 67 \end{bmatrix}; B := \begin{bmatrix} -2 & -4 & 69 \\ -32 & 27 & 99 \\ -74 & 8 & 29 \end{bmatrix}; C := \begin{bmatrix} -9 & -81 & 33 & 27 \\ -50 & -38 & -98 & -93 \\ -22 & -18 & -77 & -76 \\ 45 & 87 & 57 & -72 \end{bmatrix}$$

$$A := \begin{bmatrix} 44 & -31 \\ 92 & 67 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -2 & -4 & 69 \\ -32 & 27 & 99 \\ -74 & 8 & 29 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} -9 & -81 & 33 & 27 \\ -50 & -38 & -98 & -93 \\ -22 & -18 & -77 & -76 \\ 45 & 87 & 57 & -72 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2.1)}$$

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(A)

$$\begin{bmatrix} \frac{111}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{10879} \\ \frac{111}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{10879} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2.2)}$$

> *evalf* (%)

$$\begin{bmatrix} 55.50000000 + 52.15122240\,\mathrm{I} \\ 55.50000000 - 52.15122240\,\mathrm{I} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2.3)}$$

> *evalf* (*LinearAlgebra:-Eigenvalues*(B))

$$\begin{bmatrix} 34.80768537 \\ 9.59615732 + 64.00682555\,\mathrm{I} \\ 9.59615732 - 64.00682555\,\mathrm{I} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2.4)}$$

> *evalf* (*LinearAlgebra:-Eigenvalues*(C))

$$\begin{bmatrix} 30.99401140 \\ -25.84165944 \\ -100.5761760 + 103.5894649\,\mathrm{I} \\ -100.5761760 - 103.5894649\,\mathrm{I} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.1.2.5)}$$

Vemos que la primera matriz tiene autovalores complejos, la segunda un autovalor real y dos complejos conjugados, y la tercera dos autovalores reales y dos complejos conjugados.

Ejercicio 4: los "trucos" de tus profesores.

¿Te has preguntado alguna vez cómo hacen tus profesores para encontrar matrices cuyos autovalores sean sencillos? Piensa un poco en ello y construye una matriz cuadrada de orden 4 que tenga por autovalores 1,2,3,4, que no sea ni diagonal ni triangular.

Solución

Sabemos que si A es una matriz diagonalizable, se cumple

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

donde D es una matriz diagonal, con los autovalores en la diagonal y P es

una matriz que tiene por columnas una base de autovectores, y por tanto es una matriz invertible.
Entonces basta con tomar una matriz invertible cualquiera y hacer ese producto.

> $DD := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$DD := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.1)}$$

Comprobamos que P es invertible

> *LinearAlgebra:-Determinant*(**(5.1.1)**)

$$-29 \quad \textbf{(5.1.2)}$$

> $A := P.DD.P^{-1}$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{53}{29} & \frac{4}{29} & \frac{6}{29} & -\frac{12}{29} \\ -\frac{12}{29} & \frac{85}{29} & -\frac{3}{29} & \frac{6}{29} \\ -\frac{32}{29} & \frac{14}{29} & \frac{108}{29} & \frac{16}{29} \\ -\frac{30}{29} & \frac{24}{29} & \frac{36}{29} & \frac{44}{29} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.3)}$$

Hallamos sus autovalores para comprobar que son los que nos han pedido.

> *LinearAlgebra:-Eigenvalues*(**(5.1.3)**)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.4)}$$

Aplicación: Sistemas dinámicos

Los autovalores y autovectores de una matriz nos van a servir para estudiar el comportamiento a largo plazo de fenómenos que evolucionan en el tiempo.
Supongamos que denotamos por x(k)=(x1(k),x2(k),...,xn(k)) el valor de n variables de interés en el periodo k, y que sabemos que existe una matriz cuadrada de orden n y un vector b=(b1,...,bn) de forma que se cumple

x(k+1)=Ax(k)+b

En ese caso diremos que tenemos un sistema dinámico en n variables de estado LINEAL.
Un caso relevante es cuando b=(0,...,0). En ese caso si partimos de x(0), se tiene

x(1)=Ax(0), x(2)=Ax(1)=$A^2 x(0)$,...., $x(k) = A^k x(0)$
Cuando k es grande lo que tenemos es cuál será el comportamiento a largo plazo de nuestro sistema.
Se trata de calcular la potencia k de una matriz cuadrada para k grande. Para hacerlo necesitaremos "diagonalizar" la matriz, para lo que se necesitan los autovalores y autovectores de esa matriz.

Ejercicio 5

Las personas de cierta población en edad de trabajar se dividen en tres grupos: empleados, desempleados y en formación.
En cada trimestre un 10% de los empleados pierde su empleo y pasa al grupo de desempleados y otro 10% abandona su trabajo y pasa al grupo de personas en formación. De los desempleados un 40% encuentra trabajo y un 10% pasan al grupo de personas en formación. Finalmente de los que estaban formándose un 40% encuentra trabajo y otro 30% pasa a engrosar la lista de los desempleados.
a) Si x(k)=(x1(k),x2(k),x3(k)) denota el porcentaje de personas en cada uno de los grupos en el trimestre k, encuentra la matriz A que proporciona el porcentaje de personas en cada grupo en el trimestre k+1 en función de los que había en el trimestre anterior, es decir

x(k+1)=Ax(k)

¿Qué peculiaridad tiene esta matriz A?
b) ¿Hay valores x*=(x1*,x2*,x3*) tales que x*=Ax*, es decir, distribuciones invariantes? Si piensas en términos de autovalores y

autovectores ¿quiénes son esas distribuciones invariantes?
c) Si actualmente x(0)=(0.5,0.4,0.1) ¿cuál será la distribución de empleados, desempleados y en formación dentro de 2 años?
d) ¿Cuál será la distribución a largo plazo si actualmente es x(0)=(0.5,0.4, 0.1)? ¿Y si fuera x(0)=(0.1,0.8,0.1)?
e) Comprueba que λ=1 es el mayor autovalor de A. Halla el autovector asociado cuyas componentes son mayores o iguales que cero y suman 1. ¿Qué relación tiene este autovector con la distribución a largo plazo del número de empleados, desempleados y en formación que has hallado anteriormente?

Solución

a)

> $A := \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}:$

Sus columnas suman 1. Es una matriz estocástica.

b)

Si pensamos en términos de autovalores y autovectores nos preguntan si 1 es autovalor de A y que hallemos el autovector asociado cuya componentes suman 1.

> $A.\langle x1|x2|x3\rangle^{+}$

$$\begin{bmatrix} 0.8\,x1 + 0.4\,x2 + 0.4\,x3 \\ 0.1\,x1 + 0.5\,x2 + 0.3\,x3 \\ 0.1\,x1 + 0.1\,x2 + 0.3\,x3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.2.1)}$$

> $A.\langle x1|x2|x3\rangle^{+} - \langle x1|x2|x3\rangle^{+}$

$$\begin{bmatrix} -0.2\,x1 + 0.4\,x2 + 0.4\,x3 \\ 0.1\,x1 - 0.5\,x2 + 0.3\,x3 \\ 0.1\,x1 + 0.1\,x2 - 0.7\,x3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.2.2)}$$

> $solve([0.8\,x1 + 0.4\,x2 + 0.4\,x3 = x1, 0.1\,x1 + 0.5\,x2 + 0.3\,x3 = x2, 0.1\,x1 + 0.1\,x2 + 0.3\,x3 = x3], [x1, x2, x3])$

Vemos que hay infinitas soluciones, pero solo nos interesa aquella que corresponde a porcentajes, es decir x1+x2+x3=1

> $solve([0.8\,x1 + 0.4\,x2 + 0.4\,x3 = x1, 0.1\,x1 + 0.5\,x2 + 0.3\,x3 = x2, 0.1\,x1 + 0.1\,x2 + 0.3\,x3 = x3, x1 + x2 + x3 = 1], [x1, x2, x3])$

$$[[x1 = 0.6666666667, x2 = 0.2083333333, x3 = 0.1250000000]] \quad \textbf{(7.1.2.3)}$$

c)

Dos años corresponde con 8 trimestres, luego

> $x0 := \langle 0.5, 0.4, 0.1\rangle$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.3.1)}$$

> $A^{8}.x0$

$$\begin{bmatrix} 0.666557440000001 \\ 0.208442624000000 \\ 0.124999936000000 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.3.2)}$$

d)

> $x0 := \langle 0.5, 0.4, 0.1\rangle$
> $A^{8}.x0; A^{100}.x0; A^{1000}.x0$

$$\begin{bmatrix} 0.666557440000001 \\ 0.208442624000000 \\ 0.124999936000000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.666666666666674 \\ 0.208333333333336 \\ 0.125000000000001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.666666666666742 \\ 0.208333333333357 \\ 0.125000000000014 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.4.1)}$$

Vemos que converge al valor que hemos hallado en el apartado b)

> $x0 := \langle 0.1, 0.8, 0.1\rangle$

$$x0 := \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.4.2)}$$

> $A^{100}.x0$

$$\begin{bmatrix} 0.666666666666674 \\ 0.208333333333336 \\ 0.125000000000001 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.4.3)}$$

Vemos que converge al mismo valor.

e)

> A

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.5.1)}$$

Hallamos el polinomio característico y comprobamos que λ=1 es raíz.

> *LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial*(**(7.1.5.1)**, λ)

$$-0.080 + 0.68\,\lambda - 1.6\,\lambda^2 + \lambda^3 \quad \textbf{(7.1.5.2)}$$

> *eval*(**(7.1.5.2)**, [λ = 1])

$$0. \quad \textbf{(7.1.5.3)}$$

Hallamos el resto de los autovalores y comprobamos que son menores que 1.

> *LinearAlgebra:-Eigenvectors*(*A*)

$$\begin{bmatrix} 0.999999999999999 + 0.\,I \\ 0.400000000000000 + 0.\,I \\ 0.200000000000000 + 0.\,I \end{bmatrix}, [[0.939552351223526 + 0.\,I, 0.707106781186547 + 0.\,I, 4.39713839995492\;10^{-17} + 0.\,I], [0.293610109757352 + 0.\,I, -0.707106781186548 + 0.\,I, -0.707106781186548 + 0.\,I], [0.176166065854411 + 0.\,I, 2.59257831129992\;10^{-16} + 0.\,I, 0.707106781186547 + 0.\,I]] \quad \textbf{(7.1.5.4)}$$

Hallamos un autovector de A que cumpla la condición pedida.

> $v := \lambda \cdot \langle 0.939552351223526 | 0.293610109757352 | 0.176166065854411 \rangle$

$$v := [\,0.939552351223526\,\lambda \quad 0.293610109757352\,\lambda \quad 0.176166065854411\,\lambda\,] \quad \textbf{(7.1.5.5)}$$

> solve($v[1] + v[2] + v[3] = 1, \lambda$)

$$0.7095577652 \quad \textbf{(7.1.5.6)}$$

> λ := %

$$\lambda := 0.7095577652 \quad \textbf{(7.1.5.7)}$$

> *v*

$$[\,0.6666666666 \quad 0.2083333333 \quad 0.1250000000\,] \quad \textbf{(7.1.5.8)}$$

No era necesario hacerlo pues en el apartado b) al resolver Ax=x lo que estamos hallando son los autovectores del autovalor 1.

Aplicación: Autovalores y buscadores en páginas web

¿Te has preguntado alguna vez cuando haces una búsqueda por internet cómo hace el buscador para ordenar por importancia las páginas web que luego te muestra?

Lo vemos a continuación en un ejemplo con 5 páginas web y luego tú tendrás que hacer un ejercicio con 10 páginas web.

Ejemplo

Si suponemos por ejemplo que tenemos 5 páginas web, definimos en primer lugar una matriz V de "incidencias o enlaces" de dimensión 5.
La columna j de esta matriz contiene la información de las páginas web con las que enlaza la página j. Si la página j enlaza a la página i entonces V(i,j)=1, y si no enlaza con ella V(i,j)=0.
Por ejemplo, supongamos que:

La página 1 enlaza con la 2, 4 y 5
La página 2 enlaza con la 1, 3 y 4
La página 3 enlaza con la 2 y 5
La página 4 enlaza con la 2, 3 y 5
La página 5 enlaza con la 1, 3 y 4

Entonces la matriz V de incidencias es:

> $V := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} :;$

Esta es una matriz que aporta "votos" para medir la importancia de cada página. Por ejemplo la página 1 emite un voto a las páginas 2, 4 y 5. Sin embargo la página 3 solo emite un voto a la página 2. Esto no es demasiado justo. Lo lógico es que si la página 1 vota a tres páginas su voto se reparta de manera equitativa entre las tres páginas. Esto nos lleva a definir lo que vamos a llamar matriz de "calificaciones". Es la matriz que se obtiene de la anterior dividiendo los elementos de cada columna entre la suma de los elementos de esa columna (nº de unos de esa columna, o nº de páginas con las que enlaza).
En nuestro caso esa matriz es

A=

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que no sabemos qué peso darle a cada página en una primera etapa le damos a todas las páginas el mismo peso o importancia.
Es decir el vector de pesos es W0=(1/n,1/n,...1/n) donde n es el número de páginas (en nuestro caso n=5).
Es como si supusiéramos que cualquier persona tiene la misma probabilidad de entrar en cualquiera de las páginas.
Si calculamos w1=A.W0 lo que obtenemos es la "probabilidad" de acceder a cada una de las páginas en una primera ronda. Parece lógico pensar que aquellas páginas con mayor probabilidad de acceso son más importantes, y por tanto que w1 es un vector de pesos más ajustado que W0.
Las calificaciones en segunda ronda, w2=Aw1, nos da un nuevo vector de pesos, que es más realista que w1 y que w0.
Calculamos estos pesos w1 y w2 para nuestro ejemplo.

> $A := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}:$

> $n := 5 :;$

> $W0 := ConstantMatrix\left(\frac{1}{n}, n, 1\right)$

$$W0 := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.1.1)}$$

Pesos en primera ronda

> $W1 := A.W0$

$$W1 := \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.1.2)}$$

Vemos que la página que es más probable visitar es la 2, lo que no era claro inicialmente pues las páginas 3 y 5 tenían el mismo número de enlaces.
Pesos en segunda ronda,

> $W2 := A.W1$

$$W2 := \begin{bmatrix} \frac{8}{45} \\ \frac{13}{45} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(8.1.3)}$$

Pesos en 20ª ronda

> $W20 := A^{20}.ConstantMatrix\left(\frac{1}{n}, n, 1\right)$

$$W20 := \begin{bmatrix} \frac{973468178}{5811307335} \\ \frac{5309825533}{17433922005} \\ \frac{3628378514}{17433922005} \\ \frac{424786589}{3486784401} \\ \frac{3451380479}{17433922005} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.4)}$$

> $evalf(\%)$

$$\begin{bmatrix} 0.1675127681 \\ 0.3045686181 \\ 0.2081217590 \\ 0.1218276039 \\ 0.1979692509 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.5)}$$

Comprobamos la estabilización de estos pesos comparando W20 con A.W20

> $W20 - A.W20$

$$\begin{bmatrix} \frac{506}{3486784401} \\ \frac{3578}{52301766015} \\ -\frac{683}{10460353203} \\ \frac{13822}{52301766015} \\ -\frac{4315}{10460353203} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.6)}$$

> $evalf[10](\textbf{(8.1.6)})$

$$\begin{bmatrix} 1.451193827\ 10^{-7} \\ 6.841069189\ 10^{-8} \\ -6.529416232\ 10^{-8} \\ 2.642740590\ 10^{-7} \\ -4.125099713\ 10^{-7} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.7)}$$

La última instrucción sirve para aproximar las expresiones fraccionarias mediante números decimales, en particular con 10 cifras significativas. Vemos que W20 coincide con A.W20 con más de seis cifras de aproximación.

Recordamos los pesos que nos han salido

> $evalf(W20)$

$$\begin{bmatrix} 0.1675127681 \\ 0.3045686181 \\ 0.2081217590 \\ 0.1218276039 \\ 0.1979692509 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.8)}$$

Observamos que el peso mayor corresponde a la página dos.

Si miramos la matriz inicial de incidencias,

> V

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.9)}$$

no era nada claro que la página dos que recibe el mismo número de enlaces (tres enlaces) que la página 3 o la 5 fuera la de más peso. Los resultados no son nada obvios.

Sumando los pesos vemos que son pesos de ponderación.

> $u := ConstantMatrix(1, 1, n);$

$$u := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.10)}$$

> $u.W1; u.W2; u.W20$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

(8.1.11)

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.11)}$$

¿Existirá algún vector w de pesos que se mantenga invariante al considerar más y más pasos? Es decir que cumpla

Aw=w

Observa que si esto sucede es que λ=1 es autovalor de la matriz A. Y que se cumple que

$$A^2 w = AAw = Aw = w$$

y entonces

$$A^n w = w$$

Comprobamos primero si λ=1 es autovalor de nuestra matriz.

> *LinearAlgebra:-CharacteristicPolynomial*(*A*, λ)

$$\lambda^5 - \frac{2}{3}\lambda^3 - \frac{7}{27}\lambda^2 - \frac{4}{81}\lambda - \frac{2}{81} \quad \textbf{(8.1.12)}$$

> *eval*(%, λ = 1)

$$0 \quad \textbf{(8.1.13)}$$

Hemos visto que es autovalor, hallamos un autovector:

> $M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: ; $ceros := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

> *ww* := *LinearSolve*(*A*−*M*, *ceros*, *free* ='v')

$$ww := \begin{bmatrix} \frac{11}{8} v_4 \\ \frac{5}{2} v_4 \\ \frac{41}{24} v_4 \\ v_4 \\ \frac{13}{8} v_4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.14)}$$

Buscamos un vector proporcional cuyas componentes sumen 1.

> *u*; *u.ww*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{197}{24} v_4 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.15)}$$

> $v[4] := \frac{24}{197}$; *ww*

$$v_4 := \frac{24}{197}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{33}{197} \\ \frac{60}{197} \\ \frac{41}{197} \\ \frac{24}{197} \\ \frac{39}{197} \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.16)}$$

Comparamos con los pesos que habíamos obtenido previamente, para ver que son aproximadamente iguales.

> *evalf* (*ww*); *evalf* (*W20*)

$$\begin{bmatrix} 0.1675126904 \\ 0.3045685279 \\ 0.2081218274 \\ \frac{24}{197} \\ 0.1979695432 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1675127681 \\ 0.3045686181 \\ 0.2081217590 \\ 0.1218276039 \\ 0.1979692509 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.1.17)}$$

Automatización del ejemplo anterior

Automatizamos la construcción de esta matriz A para que no tengamos que repetir todo si cambiamos la matriz V.

Definimos el vector p que contiene la suma de unos en cada columna (número de páginas con las que enlaza cada página). Solo para tener esa información definimos s como el vector que contiene el número de páginas que enlazan con cada página.

> *restart*; *n* := 5 :; *with*(*LinearAlgebra*) :

> $V := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

$$V := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.1)}$$

> $u := ConstantMatrix(1, 1, n);$

$$u := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.2)}$$

> $p := u.V$

$$p := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.3)}$$

> $s := V.u^{+} :; s^{+}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.4)}$$

> $A := Matrix(n, n)$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.5)}$$

```
> for j from 1 to n do
    for i from 1 to n do
      A(i, j) := V(i, j)/p(j);
    end do
  end do
```

Definimos ahora la matriz de calificaciones dividiendo cada columna de V por la suma de unos en esa columna.

> A

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(8.2.6)}$$

Ejercicio 6

Genera la matriz de incidencias que desees para 10 páginas web. Calcula el autovector asociado al autovalor 1 de la matriz de calificaciones y dí cuál es la página más relevante. Comprueba que obtienes el mismo resultado si tomas cualquier distribución inicial de pesos v y calculas cómo se va transformando ese vector sucesivamente a medida que le aplicas la matriz de calificaciones.

Solución

> $restart; with(LinearAlgebra) :$

> $V := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} :;$

Miramos no solo los enlaces que emite cada página sino también los enlaces que recibe (suma de los unos de cada fila). Los que emite los almacenamos en el vector p y los que recibe en el vector s.

> $n := 10 :$

> $u := ConstantMatrix(1, 1, n);$

$$u := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.1.1}$$

> $p := u.V$

$$p := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 6 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{9.1.2}$$

> $s := V.u^{+}$:; s^{+}

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \tag{9.1.3}$$

Definimos ahora la matriz de calificaciones dividiendo cada columna de V por la suma de unos en esa columna.

> $A := Matrix(n, n)$:

```
> for j from 1 to n do
    for i from 1 to n do
      A(i, j) := V(i, j)/p(j);
    end do
  end do
```

> A

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0
\end{bmatrix} \tag{9.1.4}$$

> $M := IdentityMatrix(10)$:; $ceros := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

> $ww := LinearSolve(A - M, ceros, free = 'v')$

$$ww := \begin{bmatrix}
\frac{11744}{12153} v_5 \\
\frac{14564}{12153} v_5 \\
\frac{4452}{4051} v_5 \\
\frac{5738}{4051} v_5 \\
v_5 \\
\frac{10828}{12153} v_5 \\
\frac{4620}{4051} v_5 \\
\frac{6168}{4051} v_5 \\
\frac{5383}{4051} v_5 \\
\frac{20695}{12153} v_5
\end{bmatrix} \tag{9.1.5}$$

Buscamos un vector proporcional cuyas componentes sumen 1.

> $u; u.ww$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{49689}{4051} v_5 \end{bmatrix} \tag{9.1.6}$$

> $v[5] := \frac{4051}{49689}$

$$v_5 := \frac{4051}{49689} \quad (9.1.7)$$

> ww

$$\begin{bmatrix} \frac{11744}{149067} \\ \frac{14564}{149067} \\ \frac{1484}{16563} \\ \frac{5738}{49689} \\ \frac{4051}{49689} \\ \frac{10828}{149067} \\ \frac{1540}{16563} \\ \frac{2056}{16563} \\ \frac{5383}{49689} \\ \frac{20695}{149067} \end{bmatrix} \quad (9.1.8)$$

> $evalf(ww)$

$$\begin{bmatrix} 0.07878336587 \\ 0.09770103372 \\ 0.08959729516 \\ 0.1154782749 \\ \frac{4051}{49689} \\ 0.07263847800 \\ 0.09297832519 \\ 0.1241321017 \\ 0.1083338365 \\ 0.1388301905 \end{bmatrix} \quad (9.1.9)$$

La página de mayor importancia es la 8ª.
Lo comparamos con lo que obtenemos con el otro método, con por ejemplo 20 rondas o iteraciones.

> $W0 := ConstantMatrix\left(\frac{1}{n}, n, 1\right)$:

> $evalf(A^{20}.W0)$

$$\begin{bmatrix} 0.07878336011 \\ 0.09770104658 \\ 0.08959729233 \\ 0.1154782702 \\ 0.08152709649 \\ 0.07263848447 \\ 0.09297831464 \\ 0.1241321045 \\ 0.1083338444 \\ 0.1388301862 \end{bmatrix} \quad (9.1.10)$$

Formas cuadráticas y su visualización

Una forma cuadrática en n variables es una función cuadrática en la que no hay términos lineales ni constante.
Es definida positiva si es positiva para todo vector no nulo, definida negativa si toma valores negativos en todo vector no nulo, si toma valores mayores o iguales a cero es semidefinida positiva, si toma valores menores o iguales qu e cero es definida negativa. Finalmente si hay vectores no nulos para los que toma valores positivos, y otros para los que toma valores negativos es indefinida.
Si la forma cuadrática es de dos variables es fácil analizar su signo gráficamente.
En general estudiaremos su signo o bien calculando sus autovalores o bien usando el criterio de Sylvester.

Ejercicio 7

Representa las siguientes formas cuadráticas y para cada una de ellas dí si es definida positiva, negativa, semidefinida o indefinida.

f1(x,y)=$x^2 + 3y^2$

f2(x,y)=$-4x^2 - y^2$

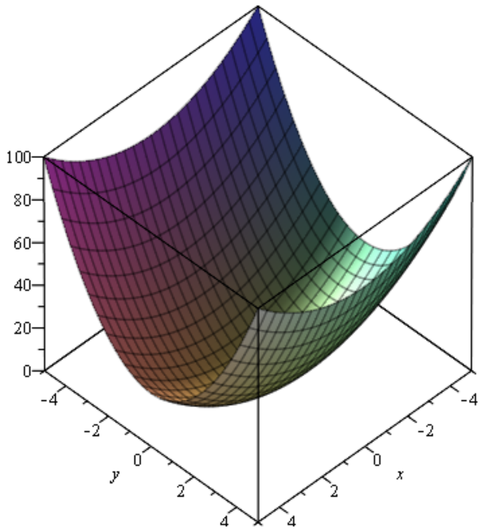
f3(x,y)=2 x^2

f4(x,y)=$x^2 - 3\ y^2$

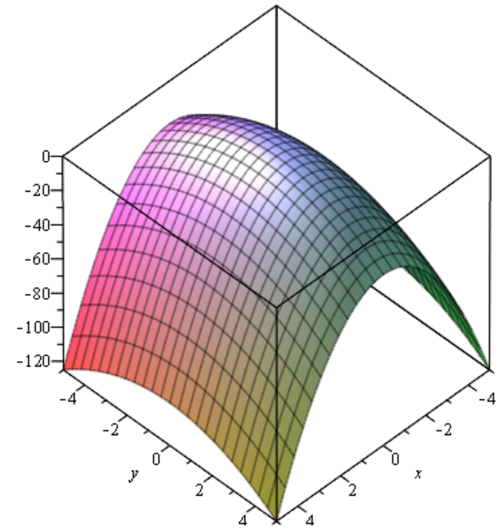
Solución

Puesto que todas ellas están expresadas como suma de cuadrados era inmediato saber su carácter sin dibujarlas, la primera es definida positiva, la segunda definida negativa, la tercera semidefinida positiva y la última indefinida. Lo vemos a continuación dibujándolas.

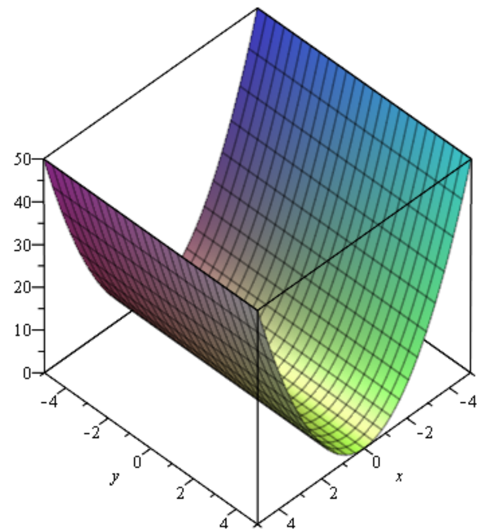
> $plot3d(x^2 + 3 \cdot y^2, x = -5..5, y = -5..5)$



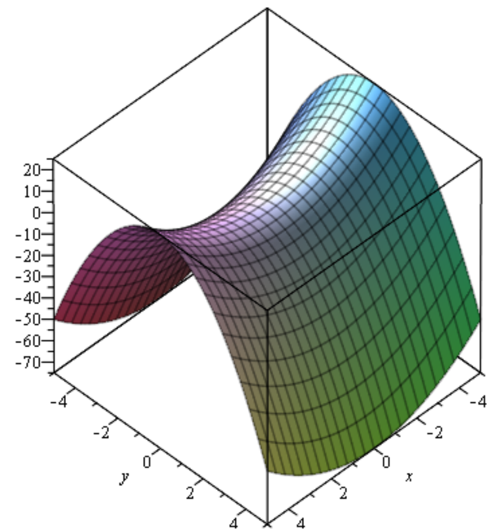
> $plot3d(-4 \cdot x^2 - y^2, x = -5..5, y = -5..5)$



> $plot3d(2 \cdot x^2, x = -5..5, y = -5..5)$



> $plot3d(x^2-3\cdot y^2, x=-5..5, y=-5..5)$



Ejercicio 8

Genera aleatoriamente una matriz simétrica de dimensión dos. Clasifícala usando los siguientes métodos:

a) Dibujándola

b) Calculando sus autovalores

c) Por el criterio de los menores de Sylvester.

Solución

> $A := \begin{bmatrix} 67 & -31 \\ -31 & 92 \end{bmatrix}$

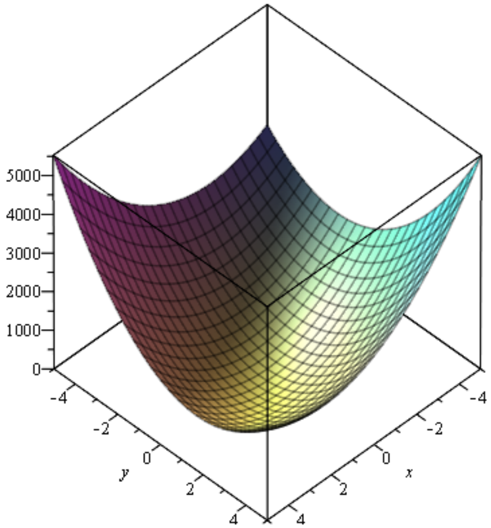
$$A := \begin{bmatrix} 67 & -31 \\ -31 & 92 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.1)}$$

> $f := (x, y) \rightarrow \langle x|y\rangle.A.\langle x, y\rangle$

(12.1.2)

$f := (x, y) \rightarrow Typesetting\text{:-}delayDotProduct\big(Typesetting\text{:-}delayDotProduct(\langle x|y\rangle, A), \langle x, y\rangle\big)$ **(12.1.2)**

> plot3d(f(x, y), x=-5..5, y=-5..5)



Gráficamente vemos que es definida positiva. Lo comprobamos con los autovalores. Si usamos el criterio de los menores, vemos que el primero es positivo. Luego si el determinate es positivo será definida positiva, si es negativo será indefinida y si es nulo será semidefinida positiva.

> LinearAlgebra:-Determinant(A)

$$5203 \quad \textbf{(12.1.3)}$$

> evalf(LinearAlgebra:-Eigenvalues(A))

$$\begin{bmatrix} 112.9252898 \\ 46.07471018 \end{bmatrix} \quad \textbf{(12.1.4)}$$

Ejercicio 9

Construye una foma cuadrática con matriz no diagonal cuya forma canónica reducida en cierta base sea

f(x,y,z)=$3x^2 + 5\,y^2 + z^2$

Solución

Si una forma cuadrática con matriz A tiene esa expresión canónica reducida en cierta base es porque existe una base de autovectores ortogonal P tal que

$$A = P\cdot \mathrm{D}\cdot P^t$$

donde D es una matriz diagonal con los valores 3, 5, 1 en la diagonal. Asi que lo único que hay que hacer es tomar una matriz P ortogonal y hacer ese producto.

Para tomar una matriz ortogonal los que hacemos es tomar una matriz M arbitraria y luego obtener a partir de sus columnas una base ortonormal por el método de Gram-Schmidt. Puesto que vamos a generar M aleatoriamente, la matriz ortononal no será tan sencilla como las que ves habitualmente en las clases, y tampoco lo será la matriz A.

> $M := \begin{bmatrix} -93 & 27 & 57 \\ 27 & -77 & -98 \\ 57 & -98 & 33 \end{bmatrix}$

$$M := \begin{bmatrix} -93 & 27 & 57 \\ 27 & -77 & -98 \\ 57 & -98 & 33 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.1)}$$

> with(LinearAlgebra) :

> s := GramSchmidt([Column(M, 1), Column(M, 2), Column(M, 3)], *normalized*)

$$s := \left[\begin{bmatrix} -\frac{31}{1403}\sqrt{1403} \\ \frac{9}{1403}\sqrt{1403} \\ \frac{19}{1403}\sqrt{1403} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{67271}{5289273522}\sqrt{1763091174} \\ -\frac{77503}{5289273522}\sqrt{1763091174} \\ -\frac{36523}{2644636761}\sqrt{1763091174} \end{bmatrix}, \right. \quad \textbf{(13.1.2)}$$

$$\left[\begin{array}{c}\frac{581}{1324463495706}\sqrt{155103063615978738}\\ -\frac{2525}{1324463495706}\sqrt{155103063615978738}\\ \frac{1072}{662231747853}\sqrt{155103063615978738}\end{array}\right]$$

> $P := \langle s[1] | s[2] | s[3] \rangle$

$$P := \left[\left[-\frac{31}{1403}\sqrt{1403}, -\frac{67271}{5289273522}\sqrt{1763091174}, \frac{581}{1324463495706}\sqrt{155103063615978738}\right], \left[\frac{9}{1403}\sqrt{1403}, -\frac{77503}{5289273522}\sqrt{1763091174}, -\frac{2525}{1324463495706}\sqrt{155103063615978738}\right], \left[\frac{19}{1403}\sqrt{1403}, -\frac{36523}{2644636761}\sqrt{1763091174}, \frac{1072}{662231747853}\sqrt{155103063615978738}\right]\right] \quad \textbf{(13.1.3)}$$

Comprobamos que P es ortogonal

> $evalf(P.P^{+})$

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.4)}$$

Hallamos quién es aproximadamente P

> $evalf(P)$

$$\begin{bmatrix} -0.8276235848 & -0.5340344123 & 0.1727612460 \\ 0.2402778150 & -0.6152616889 & -0.7508126439 \\ 0.5072531648 & -0.5798795570 & 0.6375217061 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.5)}$$

El valor D está reservado por Maple y no puede usarse, por eso llamamos DD a la matriz diagonal. La matriz A buscada es $A = P \cdot DD \cdot P^t$

> $DD := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$

> $A := P.DD.P^{+}$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{27853520207}{7933910283} & \frac{7271940388}{7933910283} & \frac{3166210874}{7933910283} \\ \frac{7271940388}{7933910283} & \frac{20863443983}{7933910283} & \frac{13256564938}{7933910283} \\ \frac{3166210874}{7933910283} & \frac{13256564938}{7933910283} & \frac{22688228357}{7933910283} \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.6)}$$

> $evalf(A)$

$$\begin{bmatrix} 3.510692611 & 0.9165644844 & 0.3990731885 \\ 0.9165644844 & 2.629654639 & 1.670874067 \\ 0.3990731885 & 1.670874067 & 2.859652750 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.7)}$$

> $LinearAlgebra:-Eigenvalues(A)$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(13.1.8)}$$

Ejercicio 10

Sea A= $\begin{bmatrix} 13 & 2 & -4 \\ 2 & 13 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

a) Halla la forma cuadrática que tiene por matriz A
b) Diagonaliza ortogonalmente esa matriz A y halla la expresión canónica o reducida para la forma cuadrática. Clasifica esa forma cuadrática.
c) Expresa la forma cuadrática como suma de cuadrados.

Solución

a)

> $A := \begin{bmatrix} 13 & 2 & -4 \\ 2 & 13 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{bmatrix}:$

> $x := \langle x1 | x2 | x3 \rangle^{+}:$

> $x^{+}.A.x$

$$(13\,x1 + 2\,x2 - 4\,x3)\,x1 + (2\,x1 + 13\,x2 + 4\,x3)\,x2 + (-4\,x1 + 4\,x2 + 7\,x3)\,x3 \quad \textbf{(14.1.1.1)}$$

> simplify(**(14.1.1.1)**, 'symbolic')

$$13\,x1^2 + 4\,x1\,x2 - 8\,x1\,x3 + 13\,x2^2 + 8\,x2\,x3 + 7\,x3^2 \quad \textbf{(14.1.1.2)}$$

b)

> $LinearAlgebra:-Eigenvectors(A)$

$$\left[\begin{array}{c}3\\15\\15\end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc}\frac{1}{2} & -2 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.2.1)}$$

Hay un par de autovalores repetidos, y sus autovectores correspondientes no son perpendiculares. Buscamos una base ortonormal a partir de la que ya tenemos.

> $M := \%[2]$

$$M := \left[\begin{array}{ccc}\frac{1}{2} & -2 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.2.2)}$$

> with(LinearAlgebra) :

> $s := GramSchmidt(\,[\mathrm{Column}(M, 1), \mathrm{Column}(M, 2), \mathrm{Column}(M, 3)\,], normalized)$

$$s := \left[\left[\begin{array}{c}\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6}\\ \frac{1}{3}\sqrt{6}\end{array}\right], \left[\begin{array}{c}-\frac{2}{5}\sqrt{5}\\ 0\\ \frac{1}{5}\sqrt{5}\end{array}\right], \left[\begin{array}{c}\frac{1}{30}\sqrt{30}\\ \frac{1}{6}\sqrt{30}\\ \frac{1}{15}\sqrt{30}\end{array}\right]\right] \quad \textbf{(14.1.2.3)}$$

> $P := \langle s[1] | s[2] | s[3] \rangle$

$$P := \left[\begin{array}{ccc}\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{30}\sqrt{30}\\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{30}\\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{15}\sqrt{30}\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.2.4)}$$

Comprobamos que P es ortonormal

> $P.P^{+}$

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.2.5)}$$

Definimos la matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores

> $DD := \left[\begin{array}{ccc}3 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 15\end{array}\right]:$

Comprobamos que A=$P.DD.P^{+}$

> $A - P.DD.P^{+}$

$$\left[\begin{array}{ccc}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.2.6)}$$

Como los tres autovalores son positivos la forma cuadrática es definida positiva.

c)

> $y := P^{+}.x$

$$y := \left[\begin{array}{c}\frac{1}{6}\sqrt{6}\,x1 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\,x2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\,x3\\ -\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}\,x3\\ \frac{1}{30}\sqrt{30}\,x1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\,x2 + \frac{1}{15}\sqrt{30}\,x3\end{array}\right] \quad \textbf{(14.1.3.1)}$$

En las nuevas variables (y1,y2,y3) la forma cuadrática se expresa como
f(y1,y2,y3)=3 $y1^2 + 15\,y2^2 + 15\,y3$. Lo comprobamos:

> $x^{+}.A.x - y^{+}.DD.y$

$$(13\,x1 + 2\,x2 - 4\,x3)\,x1 + (2\,x1 + 13\,x2 + 4\,x3)\,x2 + (-4\,x1 + 4\,x2 + 7\,x3)\,x3 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\,x1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}\,x2 + \sqrt{6}\,x3\right)\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\,x1 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\,x2 + \frac{1}{3}\sqrt{6}\,x3\right) - \left(-6\sqrt{5}\,x1 + 3\sqrt{5}\,x3\right)\left(-\frac{2}{5}\sqrt{5}\,x1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}\,x3\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{30}\,x1 + \frac{5}{2}\sqrt{30}\,x2 + \sqrt{30}\,x3\right)\left(\frac{1}{30}\sqrt{30}\,x1 + \frac{1}{6}\sqrt{30}\,x2 + \frac{1}{15}\sqrt{30}\,x3\right) \quad \textbf{(14.1.3.2)}$$

> *simplify*(**(14.1.3.2)**)

$$0 \quad \textbf{(14.1.3.3)}$$

>